



João Henrique Teodoro Antunes Rolla

Licenciado em Ciências de Engenharia Mecânica

Modelação para apoio ao projeto de armazéns verticais rotativos

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia
Mecânica

Orientador: António Gabriel Marques Duarte dos Santos, Prof.
Auxiliar, FCT-UNL

Presidente: Professor Doutor António José Freire Mourão, Prof. Associado, FCT-UNL

Vogais: Professor Doutor Alberto José Antunes Marques Martinho Prof. Auxiliar, FCT-UNL;

Professor Doutor António Gabriel Marques Duarte dos Santos Prof. Auxiliar, FCT-UNL.



**FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA**

Setembro 2015

Agradecimentos

No decorrer de todo um percurso académico, não só nesta dissertação em específico, mas também ao longo de todos estes 5 anos de trabalho, foi muita a ajuda que tive para a conclusão do curso, e, sem ela, nunca teria conseguido terminar este mestrado da melhor forma.

Agradeço ao Professor Doutor António Gabriel Marques Duarte dos Santos pela ajuda no desenvolvimento desta dissertação e da constante disponibilidade demonstrada para me orientar da melhor maneira possível, esclarecendo todas as dúvidas que me iam surgindo. Também queria deixar os meus agradecimentos ao Professor Doutor António Manuel Flores Romão de Azevedo Gonçalves Coelho pela ajuda prestada na fase inicial deste projeto e ao Professor Doutor Alberto José Antunes Marques Martinho pela contribuição dada para o melhoramento deste documento.

Dando um apoio diferente, não só nesta última fase, mas ao longo de todo meu percurso académico, gostaria de agradecer aos meus pais que sempre me deram as melhores condições para que eu pudesse concluir os meus estudos.

Por último, queria deixar também o meu agradecimento a todos os meus colegas de curso pelo espírito de entreaajuda que se foi criando ao longo destes cinco anos e que nos permitiu concluir o curso da melhor forma possível.

A todos, um muito obrigado.

Resumo

Hoje em dia, os engenheiros projetistas têm um papel fundamental na indústria ligada a qualquer tipo de produto. São eles os responsáveis pela concepção estrutural, pela previsão das cargas que atuam na estrutura, pelas soluções construtivas, pelo cálculo dos esforços e deformações que possam vir a existir, pelo dimensionamento das peças constituintes e finalmente, pelos pequenos detalhes necessários para se conseguir executar completamente. Resumidamente, são eles que estão por detrás de todo o processo produtivo. Devido a todas estas tarefas a que o engenheiro tem que desempenhar, este trabalho torna-se bastante desgastante a nível psicológico, no entanto, têm sido desenvolvidos instrumentos de apoio que tornam o seu trabalho mais fácil.

A presente dissertação focou-se num tipo de máquinas em específico, os armazéns verticais rotativos, e tem como objetivo auxiliar, de algum modo, os projetistas que se deparem com a tarefa de ter que projetar uma máquina deste tipo. Funcionando como mais um instrumento de auxílio às tarefas de projeto destes engenheiros, esta tese pretende mostrar as condicionantes a ter em conta quando se quer projetar uma máquina deste tipo, bem como, a partir das especificações das dimensões e quantidades a armazenar, fornecer os parâmetros de projeto principais para o dimensionamento funcional e geométrico do elevador vertical rotativo a projetar, poupando assim, muito trabalho e tempo ao engenheiro que tiver a seu cargo o projeto deste tipo de máquina.

Nesta dissertação não são apresentados cálculos com valores numéricos, sendo apresentadas as relações existentes entre os vários parâmetros de projeto, o que faz com que esta máquina possa ter várias configurações consoante as especificações de cada caso.

Através das expressões deduzidas nesta dissertação, vai ser possível observar que estamos perante um projeto acoplado, o que faz com que tenhamos que adotar certas condições, de maneira a conseguir torná-lo num projeto desacoplado, o que faz também com que a máquina em si se torne mais limitada em certos aspetos.

Palavras-chave

Engenheiro projetista, armazém rotativo, parâmetro de projeto, projeto acoplado, projeto desacoplado.

Abstract

Nowadays, design engineers have an essential role in the industry related to any kind of product. They are responsible for all the structural plan, for the forecast of all loads in the structures, for the constructive solutions, for the calculation of the efforts and strains that may be existing, for the sizing of the constituent parts and finally, for the little details needed to conclude the design at 100%. Basically, they are the responsible for all the productive process. Due to all these tasks that engineers are subjected to, this job becomes very wearing in a psychological way, however, there have been some developments related to the support tools used nowadays for this tasks, which make this job a lot easier.

The present dissertation is specified in a certain type of machines, the rotary warehouses, and has, as main objective, to help, in a certain way, all the designers who come across with a task which they have to design a machine with these characteristics. Behaving as one more accessorial tool to the work of these engineers, this thesis pretends to show all the conditions which are needed to predict when we want to design this kind of machine, as well as, from the dimensions' specifications and quantities to be stored, providing major design parameters for the functional and geometric dimensioning of the rotating vertical warehouse, and therefore, saving, in a certain way, time to the engineer who will design a machine with these characteristics.

In this dissertation, there are not presented calculations with numerical numbers. Instead of that, there are presented the existing relations between the several design parameters, which makes this machine to have several possible configurations depending on the case.

Through the deducted expressions in this dissertation, it will be possible to observe that we are towards a coupled design, which makes us to have to adopt certain conditions in order to get an uncoupled design, which makes this machine to become a bit limited in certain ways.

Key Words

Design engineer, rotary warehouse, design parameter, coupled design, uncoupled design.

Índice geral de conteúdo

Agradecimentos	i
Resumo.....	iii
Palavras-chave	iii
Abstract.....	v
Key Words	v
Índice geral de conteúdo	vii
Índice de figuras.....	x
Índice de tabelas.....	xii
Simbologia usada	xiv
1 Introdução	1
2 Revisão Bibliográfica	3
3 Armazém vertical rotativo	7
3.1 Descrição.....	7
3.2 Constituição.....	8
4 Análise e discussão do projeto	15
4.1 Projeto geométrico da máquina	15
4.1.1 Parâmetros de projeto de partida.....	15
4.1.2 Parâmetros de projeto referentes a tabelas de consulta	16
4.1.3 Cálculo do parâmetro referente ao diâmetro e raio primitivo	17
4.1.4 Cálculo do parâmetro referente ao comprimento da corrente e à distância entre centros	18
4.1.5 Cálculo do parâmetro de projeto referente ao espaçamento esticado da corrente	22
4.2 Parâmetros de projeto com solução.....	24
4.3 Parâmetros de projeto sem solução.....	25
4.3.1 Expressão para o comprimento das barras e para o ângulo que fazem entre si.	25
4.3.2 Restrição para o ponto de fixação das prateleiras	26
4.3.3 Restrição para a distância entre o ponto de apoio das prateleiras e o veio que une as rodas dentadas.....	27

4.3.4	Restrição para a folga existente entre as prateleiras que se encontram colocadas verticalmente	36
4.3.5	Restrição para o comprimento das prateleiras	38
4.4	Apanhado dos parâmetros de projeto com solução e sem solução	39
5	Projeto mecânico da máquina	40
5.1	Comportamento das prateleiras na trajetória circular	40
5.1.1	Análise cinemática da trajetória	41
5.1.2	Análise das forças aplicadas nas prateleiras	46
5.2	Dimensionamento mecânico do veio	51
5.3	Cálculo da expressão da potência total a fornecer ao sistema	55
5.3.1	Potência associada à energia Cinética	57
5.3.2	Potência associada à energia potencial	58
5.3.3	Potência associada ao arranque do sistema	59
5.3.4	Potência associada às forças de atrito	60
5.3.5	Potência total	61
6	Tabelas de síntese	62
6.1	Tabela de parâmetros	62
7	Condições admitidas para desacoplar o projeto	63
7.1	Condição 1	63
7.2	Condição 2	64
7.3	Condição 3	65
7.4	Condição 4	65
7.5	Condição 5	66
8	Tabelas de síntese	68
8.1	Atualização de todos os parâmetros de projeto	68
9	Desacoplamento final do projeto	70
10	Conclusões e trabalhos futuros	74
	Referências Bibliográficas	76
	Anexos	78

Índice de figuras

Figura 1 - Processo do projeto (adaptado de [6])	5
Figura 2 - Estrutura externa do armazém rotativo com o botão de emergência (a) e o controlador (b)	9
Figura 3 - Estrutura interna do armazém - motoredutor (a), prateleira (b), chumaceira (c), roda dentada (d), veio (e)	10
Figura 4 - Estrutura interna relevante para o estudo da máquina	11
Figura 5 - Ampliação de alguns dos componentes do armazém. Prateleiras (a), barras (b), corrente (c), parafusos (d)	12
Figura 6 - Ilustração da distribuição dos componentes na ligação aparafusada às correntes - parafuso a), anilha b), barra c), casquilho d), elo interior da corrente e), elo exterior da corrente f), porca g)	13
Figura 7 - Dimensões das prateleiras do armazém.....	16
Figura 8 - Dimensões principais em transmissões por correntes	17
Figura 9 - Esquema de configuração de correntes para rodas dentadas iguais (a) e diferentes (b)	19
Figura 10 – Ilustração do parâmetro de projeto referente à distância entre centros	21
Figura 11 - Ilustração do parâmetro referente ao espaçamento esticado.....	22
Figura 12 - Espaço ocupado pelo troço da corrente entre duas barras	23
Figura 13 - Ilustração dos parâmetros espaçamento esticado, comprimento das barras e o ângulo entre elas.....	25
Figura 14 - Ilustração dos parâmetros de projeto referentes à altura das prateleiras e altura do ponto de apoio das mesmas	26
Figura 15 - Parte superior da máquina	27
Figura 16 - Pontos A, B e C relevantes para o estudo	28
Figura 17 - Trajetória real do ponto de apoio das caixas (a azul) e uma trajetória circular (a castanho)	29
Figura 18 - Possível colisão entre as prateleiras.....	30
Figura 19 - Curvas da distância adimensionalizada Z para diferentes valores de lRp	33
Figura 20 - Curva da posição (α) das distâncias mínimas do ponto de apoio das prateleiras até ao eixo da roda dadas em função de lRp	34
Figura 21 - Relação entre as dimensões das prateleiras e o veio que une as rodas dentadas superiores.....	35
Figura 22 - Ilustração que mostra os Parâmetros de projeto referentes à distância entre centros, número de prateleiras colocadas na vertical, a altura das mesmas e a folga existente entre cada uma delas	37
Figura 23 - Ilustração dos parâmetros de projeto referentes ao comprimento das prateleiras e do veio	38
Figura 24 - Parte do armazém onde se estudará o comportamento das prateleiras	41

Figura 25 - Direções e intensidades das componentes x e y da velocidade (a) e da aceleração (b) nas zonas I, II e III da trajetória semicircular	42
Figura 26 - Distribuição da velocidade linear segundo a componente x	43
Figura 27 - Distribuição da velocidade linear segundo a componente	43
Figura 28 - Distribuição da aceleração linear segundo a componente x	44
Figura 29 - Distribuição da aceleração linear segundo a componente y	44
Figura 30 - Diagrama de corpo livre da prateleira	46
Figura 31 - ilustração do raio R	49
Figura 32 - Veio de comprimento L sujeito a momentos de torção T	51
Figura 33 - Distribuição das tensões de corte ao longo da secção do veio (a) e ângulo de torção máximo admissível (b)	52
Figura 34 - Ilustração das prateleiras carregadas (a azul) e das prateleiras descarregadas (a castanho)	56
Figura 35 - Condição para a altura h	64
Figura 36 - Condição para a folga f	64
Figura 37 - Condição para o comprimento do veio	66
Figura 38 - velocidade linear máxima admissível	67

Índice de tabelas

Tabela 1 – Parâmetros para os quais se obtém apenas um valor e parâmetros para os quais se obtêm vários valores	39
Tabela 2 – Primeira atualização da tabela de parâmetros de projeto com um e vários valores possíveis de se obter	62
Tabela 3 - Segunda atualização das incógnitas com uma solução e várias soluções	68

Simbologia usada

L_c – Comprimento total da corrente;

C_p – Distância entre os centros das rodas dentadas em número de passos;

z_1, z_2, z – Número de dentes das rodas dentadas;

X – Distância entre centros das rodas dentadas;

p – Passo da corrente;

γ – ângulo de contacto entre a roda e a corrente;

D_p – Diâmetro primitivo das rodas dentadas;

R_p – Raio primitivo das rodas dentadas;

v – Velocidade linear da corrente;

ω – Velocidade de rotação das rodas dentadas;

τ – Tensão de corte no veio;

τ_{adm} – Tensão de corte admissível no veio;

T – Momento de torção no veio;

ρ – Distância na secção do veio correspondente à tensão de corte que nela está aplicada;

D – Diâmetro do veio;

J – Momento polar de inércia do veio;

\emptyset - ângulo de torsão do veio;

L – Comprimento do veio;

G – Módulo de elasticidade do veio;

a – Comprimento das prateleiras;

b – Largura das prateleiras;

c – Altura das prateleiras;

n – Número de prateleiras;

m_{carga} – Massa da carga dentro as prateleiras;

$m_{prateleira}$ – Massa de uma prateleira;

m – Somatório da massa da carga com a massa da prateleira;

e_{est} – Espaçamento existente entre cada grupo de barras que suporta uma prateleira;

l – Comprimento das barras que suportam as prateleiras;

β – ângulo existente entre as barras que suportam as prateleiras;

h - Altura que vai desde a base das prateleiras até ao seu ponto de apoio;

dy – Quantidade de distância que se encontra a mais na medida do raio que vai desde o eixo de uma das rodas até ao ponto de apoio de uma das prateleiras;

K – Quantidade de prateleiras que se encontram perfeitamente na vertical num dos lados da máquina;

f – Folga que existe entre as prateleiras que se encontram na zona vertical da corrente;

V_x - Componente x da velocidade;

V_y - Componente y da velocidade;

a_x - Componente x da aceleração;

a_y - Componente y da aceleração;

t – Tempo de referência no estudo do movimento semicircular do armazém;

θ – Posição referente ao círculo trigonométrico no estudo do movimento semicircular do armazém na zona inferior da máquina

\vec{P} – Componente da força referente ao peso das prateleiras;

\vec{g} – Aceleração da gravidade;

\vec{R} – Reação consequente da junção do peso da prateleira com a força centrípeta aplicada;

$\vec{F_c}$ – Força centrípeta;

\vec{N} – Componente normal que contraria o peso;

R – Medida do raio que vai desde o centro de uma das rodas dentadas até ao ponto de apoio de uma das prateleiras que se encontra na sua semicircunferência;

\vec{V} – Parâmetro referente às velocidades no círculo trigonométrico;

\vec{a} – Parâmetro referente às acelerações tanto no círculo trigonométrico P – Potência;

ΔE – Variação de Energia;

Δt – Intervalo de tempo;

P_{Ec} – Potência associada à energia cinética;

P_{Ep} - Potência associada à energia potencial;

P_{arr} - Potência associada ao arranque;

P_{atr} - Potência associada ao atrito;

P_{TOT} – Potência total;

δ – Variação de altura no cálculo da energia potencial;

B_N – Binário nominal do motor;

α – ângulo utilizado na análise da trajetória da prateleira na zona superior da máquina;

C_x – Componente x da trajetória do ponto de apoio da prateleira;

C_y – Componente y da trajetória do ponto de apoio da prateleira;

Ψ_x – C_x adimensionalizado;

Ψ_y – C_y adimensionalizado;

λ – comprimento das barras (l) adimensionalizado.

1 Introdução

Esta dissertação tem como finalidade a criação de um modelo de apoio ao projeto de um tipo muito específico de sistemas de armazenagem. Este modelo traduz uma estratégia para a conceção e o para o projeto de armazéns. Torna-se importante para os projetistas ter o máximo de ferramentas possíveis de maneira a que o seu trabalho se torne mais simples e mais eficiente. A presente tese tem também como finalidade a previsão das dificuldades pelas quais o engenheiro passa aquando do dimensionamento de uma máquina deste género. Deste modo, para o caso de projeto de máquinas semelhantes a esta, disponibiliza-se ao projetista as expressões matemáticas já deduzidas que, individualmente, representam diferentes relações a respeitar e a ter em conta durante a fase do dimensionamento. Através disto, torna-se possível a poupança tanto de tempo de projeto como de trabalho ao engenheiro. Evita-se assim que este tenha de pensar nas restrições que o projeto terá obrigatoriamente de ter. Com a ajuda deste documento, o trabalho do engenheiro, na fase de projetar um armazém rotativo, será apenas a substituição dos valores fornecidos pelo cliente nas equações deduzidas neste documento, e assim, obter-se um conjunto de soluções e, conseqüentemente, uma configuração para a máquina de acordo com as especificações iniciais.

Este trabalho começou por ser dedicado ao estudo de mecanismos de sincronismo mecânico de um modo abrangente, ou seja, em variados tipos de mecanismos que podemos encontrar no nosso dia-a-dia, no entanto, como se tratava de um tema muito vasto devido à enorme variedade de mecanismos, tornava-se impossível realizar um estudo muito pormenorizado. Aliado também ao facto de haver uma motivação pela área de projeto de máquinas, optou-se por especificar um pouco mais estudando apenas um determinado tipo de máquinas, mas mais detalhadamente, e com o objetivo de aproveitar o seu estudo para projetistas que se deparassem com situações semelhantes. No entanto este assunto relativo ao sincronismo não foi descartado por completo, pois, o dimensionamento deste armazém também é feito tendo em conta esse importante aspeto como iremos constatar mais à frente.

Todos os problemas em engenharia têm sempre mais do que uma solução. Por vezes torna-se difícil resolver certos problemas devido à falta de dados ou mesmo devido à quantidade de soluções que é possível obter. O caso estudado neste trabalho é um exemplo perfeito dessa situação pois a quantidade de parâmetros de projeto que se definem são bastante superiores às equações que possíveis de se definir, sendo muitas vezes necessário imporem-se restrições a esses parâmetros.

Numa primeira fase estudou-se a geometria possível que a máquina poderia tomar e estabeleceram-se, tanto os parâmetros que iriam estar presentes neste dimensionamento, como também as equações e as restrições possíveis. É esta a fase que determinará a configuração que a máquina terá que ter e quais serão as suas dimensões gerais.

A segunda fase relaciona-se com o dimensionamento mecânico de certos componentes da máquina. Nesta fase são feitos estudos cinemáticos e dinâmicos de certos componentes com vista a definir a maior velocidade admissível, com base nas velocidades de rotação permitidas nas rodas dentadas responsáveis por fazer deslocar as correntes, e consequentemente, a velocidade de deslocamento total de todas as partes móveis do sistema. Também é nesta fase que se dimensionam os componentes referentes ao sincronismo mecânico.

Devido ao facto de o problema em análise ser acoplado, a terceira fase é onde se estabelecem certas condições referentes à máquina, com o objetivo de reduzir a dependência de vários parâmetros de projeto relativamente às expressões e restrições obtidas ao longo do trabalho.

Por último são apresentadas as conclusões e é feito um balanço global do estudo do armazém em questão. É nesta etapa que também se apresentam sugestões para futuros trabalhos a desenvolver nesta área de estudo. Relativamente a esses trabalhos são sugeridos assuntos que, de alguma forma, estão relacionados com o tema abordado e que não puderam ser desenvolvidos nesta dissertação.

2 Revisão Bibliográfica

Numa dissertação que aborda muito a temática dos mecanismos, nomeadamente transmissões por correntes e carretos, não se espera que recentemente tenham havido grandes desenvolvimentos relativamente a pesquisas nessa área pois tratam-se de matérias que já são usadas há muitos anos e que se encontram já muito desenvolvidas. Existem, no entanto, documentos relacionados com o tipo de máquina em estudo e que são bastante interessantes. Assim, o estado da arte está dividido em três partes essenciais. A primeira parte tem que ver com a análise de artigos que dão a conhecer algumas vantagens e inconvenientes do uso destes armazéns rotativos verticais. Na segunda parte mostram-se alguns assuntos da teoria de projeto e ao seu enquadramento neste trabalho. Por último, dá-se a conhecer também alguns pontos acerca da metodologia de projeto de armazéns de um modo mais geral que são abordados em diferentes artigos.

Começando por mencionar uma frase do artigo escrito por Shana Martin [9] relativo aos módulos de elevação vertical, podemos desde logo perceber que se trata de um documento onde são abordadas as grandes vantagens de adquirir um produto deste tipo. *“VLMs (vertical lift modules) proporcionam um maior espaço no que toca ao pavimento, maior eficiência no armazenamento e outros benefícios funcionais”*. Trata-se de um artigo interessante porque a autora procura o feedback de diferentes empresas que adquiriram este produto para se poder ter uma melhor ideia das suas variadas funcionalidades. Algumas das vantagens enunciadas pelas empresas já eram esperadas, mais concretamente quando estas dizem que *“o espaço relativo ao chão aumentou drasticamente”* ou que *“o espaço relativo à montagem dos componentes triplicou”*, no entanto, verificam-se outros benefícios muito interessantes, nomeadamente quando é dito que *“a eficiência melhorou porque os funcionários não têm de saber a configuração da peça que vão buscar às prateleiras. O sistema computadorizado tem um código atribuído a cada peça”* ou que *“o ambiente ergonômico é melhorado porque os trabalhadores não têm de se dobrar ou levantar tantas vezes”*. No entanto, a autora não deixa também de referir as limitações destes aparelhos, que também têm de se ter em conta, mais concretamente o tipo de produtos possíveis de armazenar nunca poderem ser de tamanhos muito grandes devido às limitações dos compartimentos, ou mesmo o facto de os VLMs requererem edifícios com alturas maiores que os necessários para outros armazéns.

Por vezes, a principal razão para a instalação de máquinas deste género não é o facto de poder poupar espaço, mas sim o facto de dar mais segurança aos trabalhadores durante a sua atividade profissional e de aumentar a sua produtividade. Um exemplo perfeito deste caso pode ser lido no artigo publicado por Josh Bond [11], que dá a mostrar o caso de uma empresa localizada no estado de Ohio nos Estados Unidos da América que produz moldes para fundição. Chuck Myers, presidente da empresa, é mencionado neste artigo pelas seguintes afirmações *“Ir buscar-se o molde a um armazém resultava muitas vezes numa lesão do trabalhador”* e *“para*

proteger os nossos empregados tivemos de encontrar uma maneira mais ergonômica de armazenar e de obter estes moldes". Por acréscimo, pode ler-se que, com os VLMS, não só foi possível atender a estas necessidades enunciadas pelo presidente, como também se aumentou a produtividade, visto que com as funcionalidades automáticas deste aparelho, os empregados obteriam imediatamente o molde que procuravam.

Focando-se agora mais no projeto, também é possível abordar-se alguns assuntos relativos a esta temática neste capítulo da dissertação referente ao estado da arte. Usando como base o livro "*Analytic Methods for Design Practice*" escrito por Gyung-Jin Park [6], a frase "*Um projetista passa normalmente por processos de tomadas de decisão*" ganha bastante relevância na apresentação desta dissertação. Como foi dito previamente, procura-se que o projetista seja auxiliado por este documento de maneira a que poupe trabalho na previsão das restrições a impor-se para a possível criação deste tipo de máquinas, no entanto, existem fases neste trabalho em que o engenheiro terá de tomar decisões importantes, nomeadamente no que toca à escolha de determinados parâmetros de projeto que possam influenciar fortemente a configuração da máquina. Dito isto, num trabalho como este, é necessário que o engenheiro possua uma certa sensibilidade nas tomadas de decisão referentes a esses mesmos parâmetros de acordo com as especificações do cliente.

Outro assunto interessante relativamente a este relaciona-se com os custos dos equipamentos. Como diz Gyung-Jin Park [6] - , "*o projeto tem uma extrema importância sobre todo o processo de engenharia. Apenas 5% do custo total é gasto na fase de projeto, no entanto, o resultado desta fase é que vai determinar a maioria do custo total do produto*". Esta afirmação vem frisar a extrema importância que a fase referente ao projeto tem durante todo o processo de engenharia em termos financeiros.

Ainda nesta temática, Gyung-Jin Park dá a mostrar um diagrama no qual explica bem todas as fases referentes ao projeto, como se verifica na Figura 1.

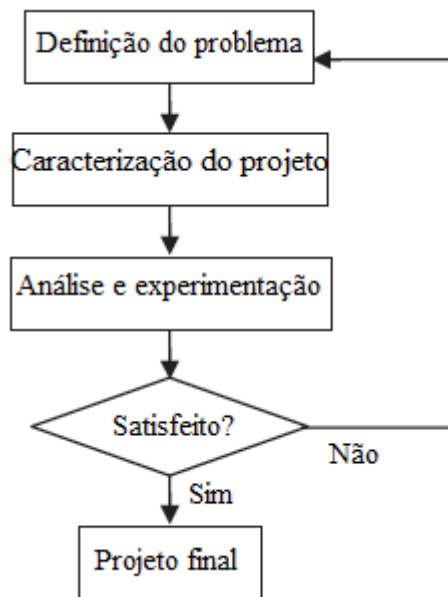


Figura 1 - Processo do projeto (adaptado de [6])

Este diagrama mostra-nos as diferentes fases pela qual o engenheiro tem que passar durante todo o processo de engenharia. Começa-se pela definição do problema. De seguida, passa-se respetivamente à determinação do projeto e à fase da análise e experimentação e, após todas estas fases, caso não se esteja satisfeito com o resultado, volta-se de novo à fase inicial e refaz-se tudo novamente. No entanto, se o resultado for satisfatório, avança-se então para o projeto final com o intuito de se passar mais tarde à fase da fabricação/montagem. Esta dissertação, funcionando numa ótica de apoio aos projetistas, estaria incluída, neste diagrama, na fase de determinação de projeto pois trata-se ainda de uma fase em que o engenheiro estará a idealizar a máquina de acordo com as necessidades impostas pelo cliente. Ao idealizá-la, será sempre necessário que o engenheiro respeite as restrições que o aparelho terá que ter de forma a minimizar a ocorrência de falhas de operação.

Passando agora ao último ponto referente à metodologia de projeto dos armazéns em geral, podemos verificar que não existe um tipo de metodologia específico pela qual se possa guiar para este tipo de projetos. Referenciando o documento “*Warehouse design: a structured approach*” publicado no *European Journal of Operational Research* [12], os autores começam por dizer que existe pouca informação relativamente à abordagem que os projetistas de armazéns devem tomar (dando mesmo exemplos de conclusões de outros artigos já existentes), e que, devido ao facto de não existir uma metodologia previamente definida, a maioria dos projetistas de armazéns desenvolveu as suas próprias aproximações.

Com isto, os autores procuram informações questionando várias empresas sobre os tipos de metodologia que usam em projetos deste tipo com o intuito de reunir dados sobre o assunto. No entanto, importa salientar um capítulo deste documento referente a técnicas individuais mais usadas (*Individual tools and techniques* [12]) neste tipo de projetos que muitas empresas adotam. Neste capítulo, os autores destacam alguns pontos como sendo os métodos mais usados pelos projetistas e que também são usados nesta tese. São eles:

- Os modelos de cálculo para considerar tipos de equipamento usado no armazém;
- Softwares de CAD (*Computer assisted design*) e softwares de simulação para desenho da configuração do armazém e respetivo estudo;

Mencionando agora outro documento, “*A modelling approach and support tool for designing automated warehouses*” [13] podemos observar que existem algumas semelhanças com esta dissertação do ponto de vista da abordagem do problema relativamente ao projeto de armazéns. Embora se tratem de armazéns diferentes do abordado neste trabalho, e embora o documento mostre um estudo cujo tema não se relaciona muito com o desta dissertação, é interessante observar-se que com a ajuda de softwares informáticos é possível realizarem-se análises mais detalhadas sobre este tipo de assuntos, o que faz com que estes instrumentos sejam, cada vez mais, fundamentais em trabalhos deste género, onde a otimização destas estruturas é fundamental.

3 Armazém vertical rotativo

3.1 Descrição

A máquina em estudo é, como já tinha sido mencionado anteriormente, um armazém rotativo. Existem alguns fabricantes deste tipo de máquinas e elas podem ser vistas, por exemplo, em farmácias, onde os medicamentos estão organizadamente guardados nas suas prateleiras. A máquina que é estudada nesta dissertação tem os seus componentes dimensionados de uma forma mais abrangente, mais concretamente as caixas (que simbolizam prateleiras), onde apenas são consideradas as três dimensões relativas ao seu volume (comprimento, largura e altura). Numa fase mais adiantada do projeto, se se quiser estabelecer uma configuração diferente para estas prateleiras (que não a paralelepípedica), é necessário que se respeite as três dimensões adotadas nesta dissertação, nunca as excedendo. Posto isto, nas ilustrações apresentadas ao longo de todo este trabalho, as prateleiras são simplesmente representadas por caixas paralelepípedicas.

Este tipo de armazém trás grandes vantagens ao seu utilizador. Primeiro, em termos de espaço, como é uma máquina que pode ter uma altura bastante considerável, torna-se vantajosa porque aproveita todo o espaço que existe sob o teto de qualquer edifício. Em segundo lugar, em termos de rapidez, este armazém tem a vantagem de entregar ao operador o respetivo pedido em apenas alguns segundos e de uma forma organizada, o que permite poupar tempo na procura. Por último, esta máquina oferece segurança e conforto ao operador, evitando ter de se agachar ou mesmo subir até a uma altura perigosa para ter de ir buscar o que se pretende.

Relativamente ao armazém propriamente dito, optou-se por desenhar com a ajuda de um software informático *SOLIDWORKS*. Este software mostra-nos com pormenor todas as zonas da máquina que interessam analisar e permite também efetuar estudos acerca da cinemática da máquina, o que para esta dissertação foi fundamental para se confirmar certos valores obtidos analiticamente. No entanto, optou-se por não abordar a parte relativa aos automatismos e à programação informática, visto que esta dissertação está mais relacionada com os assuntos do ramo da engenharia mecânica.

3.2 Constituição

Este armazém possui uma estrutura relativamente simples, no entanto, e segundo a abordagem feita neste trabalho, ir-se-á mostrar, com base em figuras do software informático *SOLIDWORKS*, como funciona e como é constituída a estrutura. Importa ressaltar que parte da estrutura se assemelha a algumas das máquinas deste tipo que existem hoje em dia no mercado, no entanto, a maioria das ideias tornam-se evidentes visto que o seu funcionamento é muito específico.

Começando a apresentar todo o armazém de fora para dentro, começamos por falar da sua estrutura externa. Essa estrutura é bastante sólida e é ela que suporta toda a outra estrutura mecânica responsável pelo funcionamento sistema, por isso, é importante que tenha não só uma robustez suficiente para aguentar com todas as cargas aplicadas, como também tenha a função de proteger o utilizador evitando que este se aproxime da zona perigosa da máquina, isto é, a sua estrutura interna que é responsável pelo seu funcionamento. A existência de uma estrutura de segurança é obrigatória pois o projeto e a construção deste tipo de equipamentos têm de satisfazer as Exigências Essenciais de Segurança e de Saúde, conforme estipulado no Decreto-Lei n.º 103/2008 de 24 de Junho, que estabelece as Regras Legais a que deve obedecer a Colocação no Mercado e a Entrada em Serviço das Máquinas, o qual transpõe para a ordem jurídica interna a Diretiva n.º 2006/42/CE, do Parlamento Europeu e do Conselho, que reúne a Diretiva Máquinas n.º 89/392/CEE e as diversas alterações de que foi sendo objeto, para este tipo de máquinas.

Esta estrutura possui uma zona aberta por onde se retira o conteúdo presente nas prateleiras. No entanto, e como já foi referido anteriormente, estas prateleiras, para efeitos de ilustração, apenas são representadas por um sólido paralelepípedo.

Continuando a apresentação da estrutura externa, podemos também dizer que é a partir dela que o utilizador dará as ordens à máquina de maneira a que esta lhe forneça a prateleira desejada. Esse mesmo utilizador dará as ordens através de um controlo que se encontra no lado direito da máquina e imediatamente abaixo da zona de onde se retira o seu conteúdo.

No entanto, na outra extremidade, existe um botão de emergência que fará com que todo o sistema seja interrompido. Este botão deverá estar sempre operacional para o caso de ser necessário interromper o sistema por algum motivo. Todos estes componentes externos podem ser observados na Figura 2.

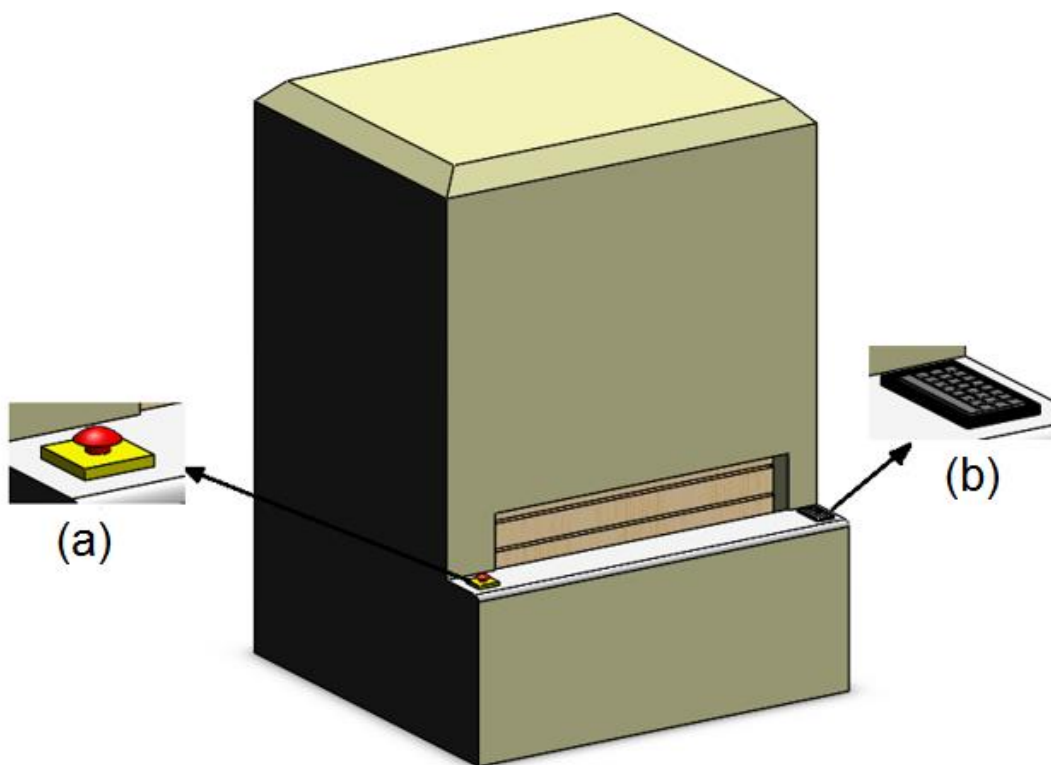


Figura 2 - Estrutura externa do armazém rotativo com o botão de emergência (a) e o controlador (b)

Passa-se agora a mostrar o interior da máquina. Toda a estrutura interna é suportada pela estrutura exterior já apresentada e a ligação destas duas dá-se através de quatro chumaceiras. Estas chumaceiras estão ligadas à estrutura exterior e suportam todo o interior através de dois veios que se encontram encaixados nessas chumaceiras. Torna-se mais fácil entender através da Figura 3.

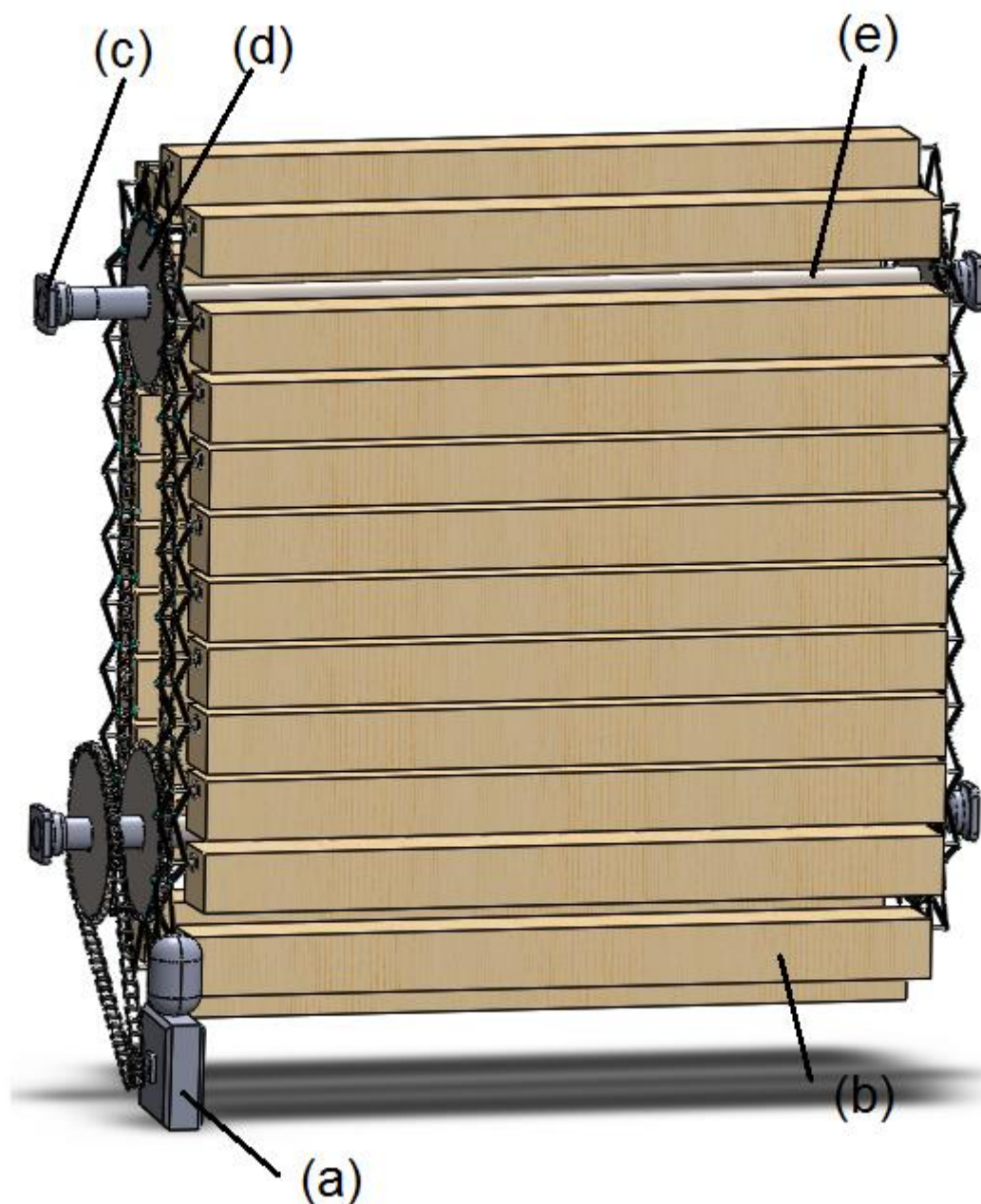


Figura 3 - Estrutura interna do armazém - motoredutor (a), prateleira (b), chumaceira (c), roda dentada (d), veio (e)

Todo este sistema é movimentado por um único motoredutor elétrico que transmitirá a potência necessária para que todo este conjunto se movimente e assim a máquina funcione. Este encontra-se na zona inferior esquerda do armazém. Como se trata de apenas um motoredutor, é necessário que se estabeleça o sincronismo em todo o sistema de maneira a que as prateleiras se desloquem todas uniformemente com apenas um grau de liberdade (rotação em torno do eixo coincidente com os seus pontos de apoio). Nesta dissertação, consideramos

que as prateleiras se deslocam no sentido horário (quando olhamos do lado onde se encontra o motoredutor).

Para o estudo da máquina, com o intuito de se realizar o anteprojeto, apenas se considera relevante estudar a estrutura representada na Figura 4, pois é esta estrutura que se vai encontrar em movimento durante o funcionamento da máquina.

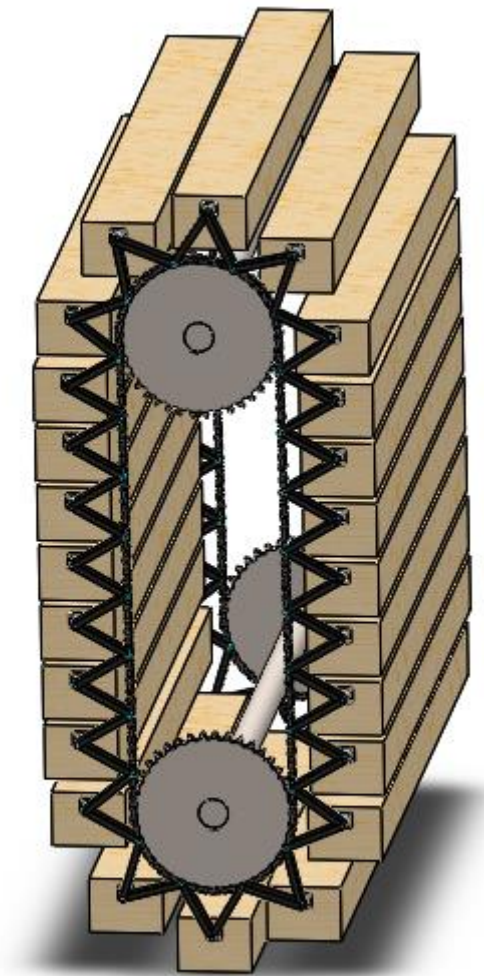


Figura 4 - Estrutura interna relevante para o estudo da máquina

Esta estrutura é composta pelos dois veios que unem as quatro rodas dentadas duas a duas, as próprias rodas dentadas, as duas correntes responsáveis pelo movimento das prateleiras, as barras que seguram as prateleiras, as anilhas, os veios que unem os apoios das prateleiras às barras e os próprios apoios das prateleiras. De seguida, são mostradas pormenorizadamente como todas estas peças estão montadas na estrutura interna da máquina.

Fazendo uma ampliação para se mostrar melhor evidenciar cada componente, é mostrada a Figura 5.

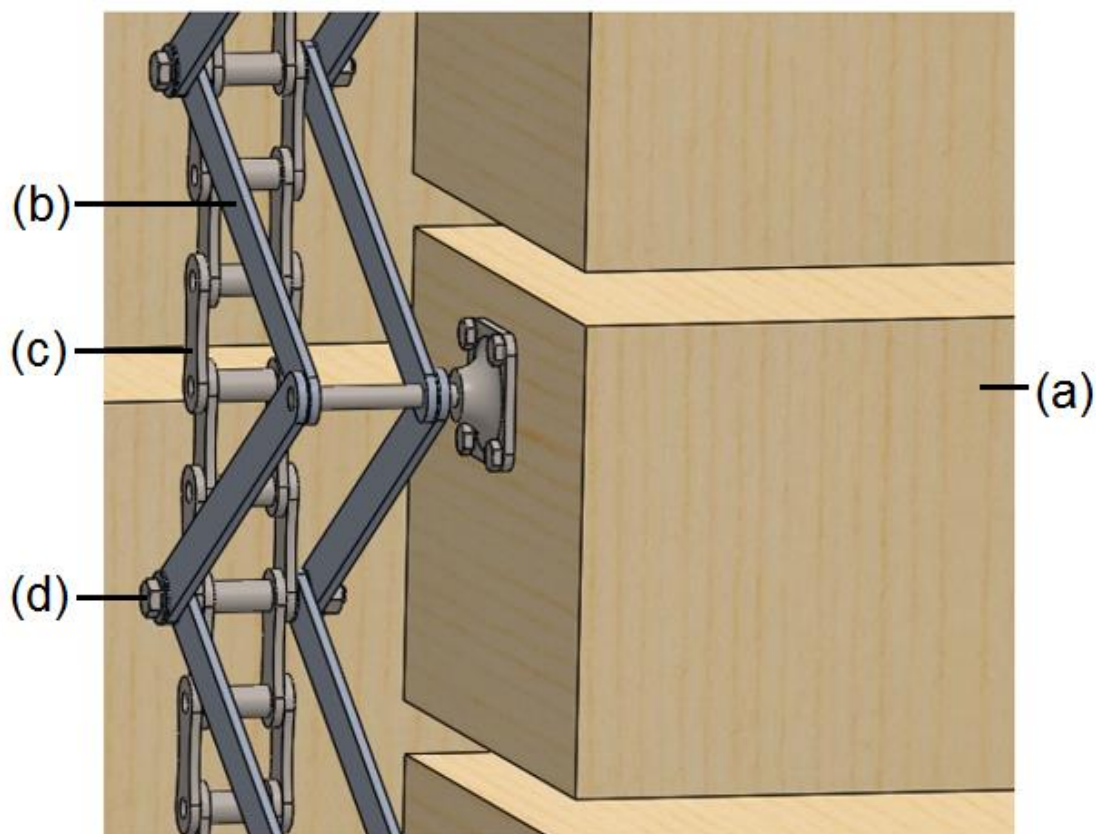


Figura 5 - Ampliação de alguns dos componentes do armazém. Prateleiras (a), barras (b), corrente (c), parafusos (d)

Como se pode ver, de cada lado das prateleiras existem quatro barras, duas de cada lado da corrente, que estão ligadas a esta através de ligações aparafusadas. São estas barras, e consequentemente as correntes de cada um dos lados que irão aguentar o peso das prateleiras e do seu conteúdo. A ligação entre essas prateleiras e as barras faz-se através de um pequeno veio. Este veio liga as quatro extremidades dessas barras com uma pequena flange que se encontra aparafusada às prateleiras no seu ponto de apoio, fazendo com que estas apenas possam rodar livremente em torno desse mesmo ponto. Através deste sistema, conseguimos que as barras apenas tenham o grau de liberdade já mencionado. No entanto, é necessário que as duas correntes se desloquem com a mesma velocidade e perfeitamente sincronizadas, caso contrário, dão origem a movimentos indesejados por parte do aparelho. Aquando da montagem de todos estes componentes, é preciso ter em atenção a necessidade de usar-se anilhas de plástico para se evitar o contato entre as peças de metal, como é o caso, por exemplo, de duas barras que se encontram juntas no mesmo lado da corrente. Se não se tivesse em conta este

assim, as peças de metal seriam sujeitas a um maior desgaste devido à fricção entre elas, havendo necessidade de as substituir muito mais frequentemente. Agora passa-se a mostrar o interior da união aparafusada para se entender como estão dispostos cada um dos elementos que constituem esta ligação.

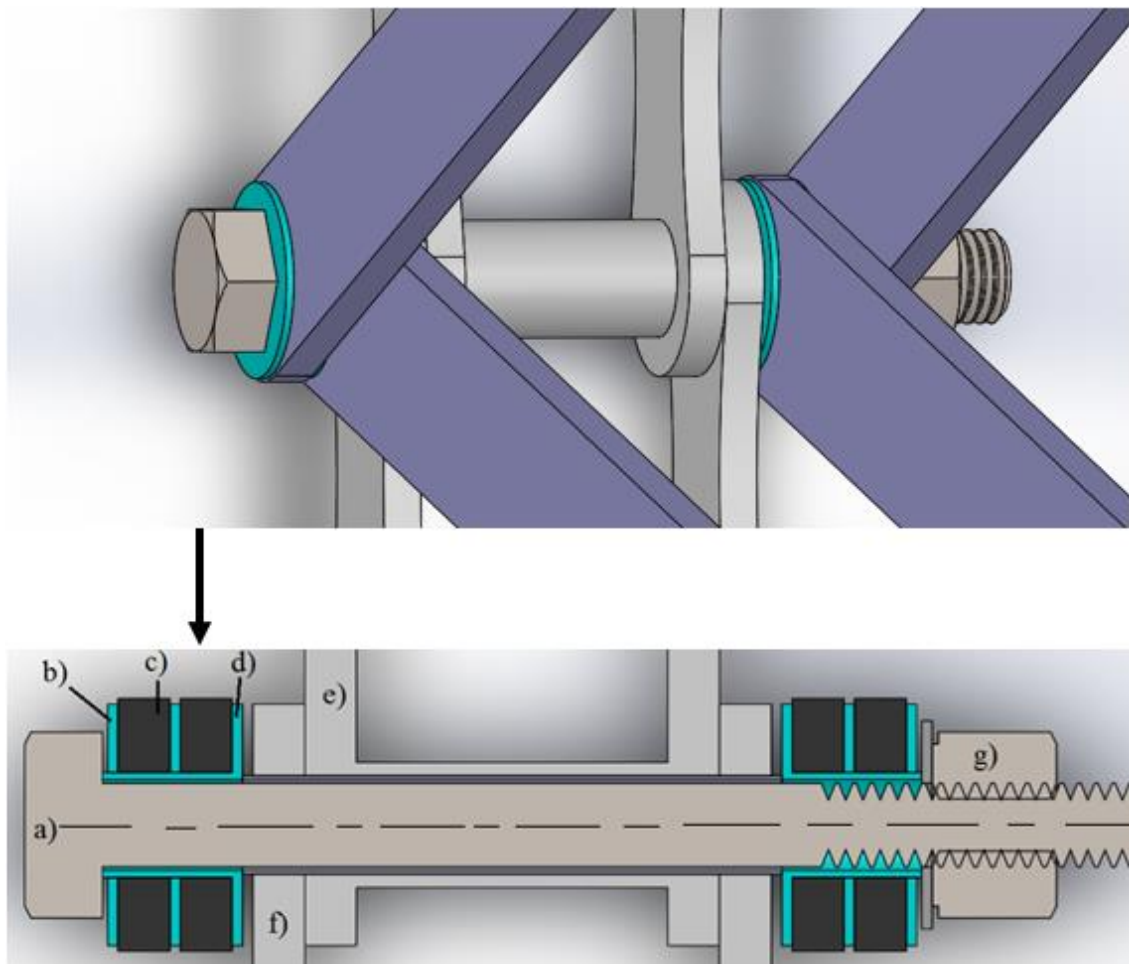


Figura 6 - Ilustração da distribuição dos componentes na ligação aparafusada às correntes - parafuso a), anilha b), barra c), casquilho d), elo interior da corrente e), elo exterior da corrente f), porca g)

Na Figura 6 podemos observar que existe um ordenamento planeado relativamente à configuração das partes que constituem esta ligação aparafusada. Nesta representação, é possível ver-se todos os componentes já mencionados anteriormente, mais concretamente o parafuso e a porca (nas extremidades representados a cinzento) com as suas respetivas anilhas de metal (representadas também a cinzento), as anilhas de plástico (representadas a azul), os elos da corrente (representados a cinzento escuro) e as barras que suportam as prateleiras (representadas a preto). De notar a colocação das anilhas de plástico sempre entre os componentes de metal para assim evitar o seu maior desgaste. É importante ter em

atenção que esta figura não se trata de um desenho técnico próprio de engenharia. Trata-se apenas de uma ilustração.

4 Análise e discussão do projeto

Neste capítulo são apresentadas as condicionantes que o projeto tem de respeitar de modo a que seja possível a construção do armazém rotativo. Importa referir que nesta dissertação é estudado um armazém que permite que passe apenas uma prateleira de cada vez pela zona correspondente às rodas dentadas, ou seja, admitimos que o raio das rodas dentadas será o mínimo valor possível. Para tal, foi feito um estudo pormenorizado tanto a nível geométrico, como a nível do dimensionamento dos seus constituintes de maneira a que o funcionamento desta máquina ocorra sem problemas independentemente das condições iniciais que forem escolhidas pelo cliente.

4.1 Projeto geométrico da máquina

4.1.1 Parâmetros de projeto de partida

No projeto em engenharia mecânica, normalmente não conseguimos ter acesso a todos os dados necessários para a resolução das equações aplicáveis e deste modo conseguir chegar a resultados concretos e imediatos. Nesta análise seria esperado que nos deparássemos com um projeto acoplado dado o número de parâmetros de projeto que desconhecemos ser superiores ao número de equações que conseguimos estabelecer. Devido a isto, teve de se optar por relacionar alguns desses parâmetros entre si de maneira a que fosse possível restringir ao máximo o número de variáveis a considerar.

Começando pelo dimensionamento geométrico, partimos do pressuposto que nos são fornecidos pelo cliente cinco dados (o que normalmente acontece). São a partir desses mesmos dados que se começa a projetar a máquina em termos de dimensões. São eles:

- O número de prateleiras (n) que a máquina irá ter;
- O comprimento, a largura e a altura das prateleiras ($a \times b \times c$);
- A carga máxima por prateleira (m_{carga}).

Na Figura 7 é mostrada a prateleira representada pela caixa paralelepípedica e respectivas dimensões

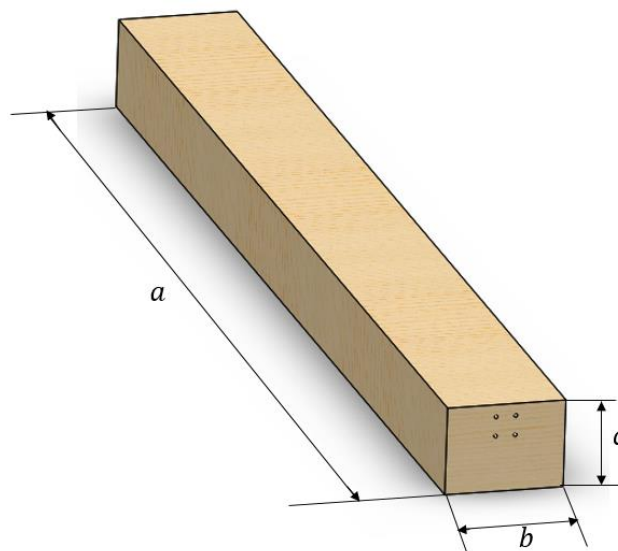


Figura 7 - Dimensões das prateleiras do armazém

4.1.2 Parâmetros de projeto referentes a tabelas de consulta

Por outro lado, temos também o auxílio de tabelas referentes a catálogos de fornecedores de correntes e de rodas dentadas, que são disponibilizadas em anexo. Estes catálogos são fundamentais quando chega a hora de estabelecer os valores concretos para determinados parâmetros necessários ao cálculo do comprimento total da corrente que vamos usar na máquina. Esses parâmetros são o passo da corrente (p) e o número de dentes das rodas (z).

4.1.3 Cálculo do parâmetro referente ao diâmetro e raio primitivo

Na Figura 8, podemos ver ilustradas as incógnitas necessárias para deduzir a expressão que nos permite calcular o diâmetro primitivo das rodas. São elas o passo p , o ângulo de contato γ e o número de dentes z .

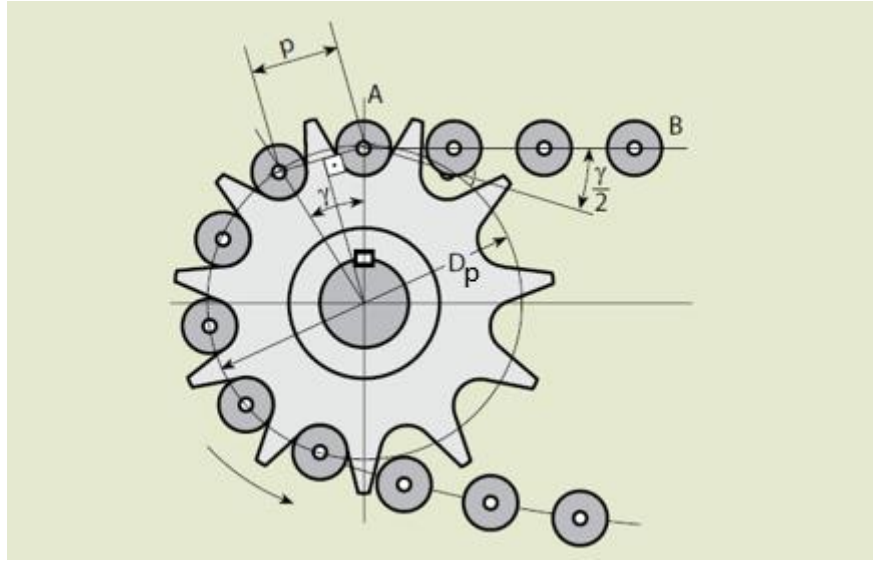


Figura 8 - Dimensões principais em transmissões por correntes

Com a ajuda da figura, podemos dizer que:

$$\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{p}{2}}{\frac{D_p}{2}} \Rightarrow D_p = \frac{p}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

E que:

$$\gamma = \frac{360^\circ}{z}$$

Deste modo, e fazendo as devidas substituições, podemos então dizer que,

$$D_p = \frac{p}{\sin\left(\frac{180^\circ}{z}\right)} \quad (1)$$

Admitamos agora que estão escolhidos, por parte do projetista, os valores para o passo (p) e para o número de dentes das rodas (z) com a ajuda de tabelas para o efeito. Com a escolha destes valores, torna-se agora possível obter o diâmetro primitivo (D_p), isto porque de acordo com a expressão deduzida, essa incógnita apenas dependerá dos valores de p e z retirados nas tabelas. A partir dela também se tira facilmente o valor do raio primitivo (R_p) reduzindo para metade esse valor de diâmetro primitivo.

4.1.4 Cálculo do parâmetro referente ao comprimento da corrente e à distância entre centros

Passando agora ao cálculo do comprimento total da corrente pode-se dizer que este valor depende da distância entre centros das rodas (C_p) e do número de dentes das duas rodas dentadas (z_1 e z_2). O comprimento total da corrente é então dado pela equação 1:

$$L_c = 2C_p + \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{(z_2 - z_1)^2}{4\pi^2 * C_p} \quad (2)$$

em que a distância entre centros é calculada através da expressão seguinte,

$$C_p = \frac{X}{2p}$$

No entanto, no nosso caso torna-se bastante mais simples o cálculo deste comprimento devido aos seguintes fatores:

1. Ao ter-se duas rodas dentadas de cada lado da máquina exatamente com o mesmo número de dentes ($z_1 = z_2 = z$) vai resultar uma mudança na segunda parte da equação 1. Esta passa a tornar-se bastante mais simples, ou seja:

$$\frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{z + z}{2} = 2 \times \frac{z}{2} = z$$

2. Visto que as rodas possuem o mesmo número de dentes, quando se analisa a 3ª parte da equação 1, vamos notar que esta expressão deixa de ter efeito. Isto deve-se ao facto de a distância entre os dois centros da roda ter exatamente o mesmo valor que a corrente possui desde o engrenamento de uma das rodas até à outra. Para uma melhor compreensão, é mostrado na Figura 9 a diferença que existe quando se usa esta 3ª expressão.

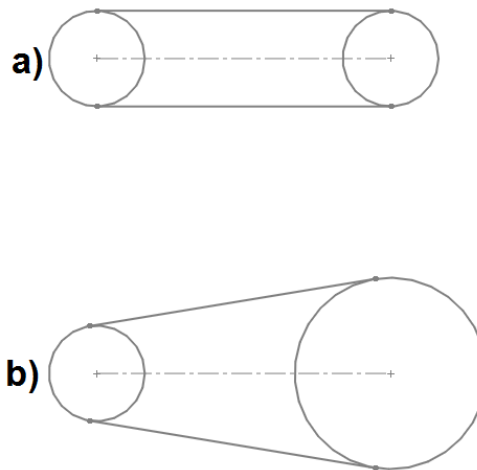


Figura 9 - Esquema de configuração de correntes para rodas dentadas iguais (a) e diferentes (b)

Matematicamente temos:

$$\frac{(z_2 - z_1)^2}{4\pi^2 * C_p} = \frac{(z - z)^2}{4\pi^2 * C_p} = 0$$

Passamos agora a ter uma equação para calcular o comprimento da nossa corrente bastante mais simples. Essa equação apenas vai depender da distância entre centros (X), do passo (p) e do número de dentes das rodas (z).

Após todas as simplificações, falta ainda determinar um valor que ainda não possuímos, a distância entre centros X . Vem então uma nova equação, a equação (3), relativa ao comprimento da corrente neste caso específico:

$$L_c = \frac{X}{2p} + z \quad (3)$$

De notar que este valor do comprimento da corrente tem obrigatoriamente de ser calculado em “número par de passos”. Procede-se desta forma para ser possível montá-la, visto que assim existirá exatamente o mesmo número de elos interiores e exteriores. Se porventura calculássemos a corrente utilizando como medida a unidade do Sistema Internacional para distância, metro, correríamos o risco de, aquando da montagem da corrente, vir a ser impossível colocar todos os devidos elos. Como não se torna possível obter ainda uma solução única para a equação (3), é apresentado agora outra expressão que nos relaciona, de uma maneira diferente, a distância entre centros e o comprimento total da corrente.

Vem agora a equação (4) que relaciona o comprimento total da corrente com o percurso que a mesma vai descrever ao longo da máquina. É possível relacionar-se, de novo, os dois parâmetros cujos valores ainda não são possíveis de estimar. Esta nova equação deduz-se analisando o percurso que a corrente faz ao longo da máquina. Vem então:

$$L_c = 2 \times X + 2\pi \times R_p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{L_c - 2\pi \times R_p}{2} \quad (4)$$

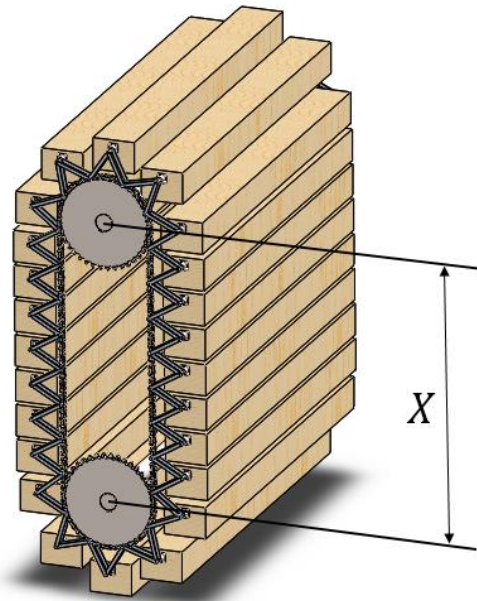


Figura 10 – Ilustração do parâmetro de projeto referente à distância entre centros

Com estas duas equações (3) e (4) deduzidas anteriormente, torna-se possível obter um sistema e assim resolver-se de maneira a obter valores para os dois parâmetros L_c e X .

$$\begin{cases} L_c = \frac{X}{p} + z \\ X = \frac{L_c - 2\pi \times R_p}{2} \end{cases}$$

4.1.5 Cálculo do parâmetro de projeto referente ao espaçamento esticado da corrente

Chamamos espaçamento esticado (e_{est}) ao comprimento de corrente que existe entre cada grupo de barras que se encontram a percorrer a zona retilínea da máquina. Podemos retirar diretamente este valor através uma expressão. Para tal, relaciona-se o número de prateleiras que existem com o comprimento total da corrente disponível e daí vem a equação (5). De notar que a este espaçamento se dá o nome de espaçamento esticado pelo motivo de as barras apresentarem outro valor de espaçamento entre si na zona correspondente às rodas dentadas (zona em que a corrente fica com uma configuração curvilínea). Assim vem:

$$n \times e_{est} = L_c$$

$$e_{est} = \frac{L_c}{n} \quad (5)$$

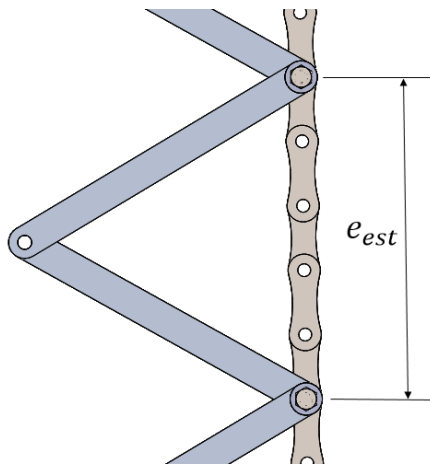


Figura 11 - Ilustração do parâmetro referente ao espaçamento esticado

Para este valor de espaçamento esticado (e_{est}) é necessário que se tenha em consideração o seguinte aspeto: o valor da solução na equação acima mostrada tem de, obrigatoriamente, ser um número inteiro. Isto deve-se ao facto de, na corrente, ter que existir um número inteiro de espaçamentos esticados entre si, caso contrário, correríamos o risco de o seu número total não ser coerente com o comprimento total da corrente. Sendo assim, caso o valor obtido para este espaçamento não seja um número inteiro, escolhem-se novos valores de passo da corrente (p) e número de dentes das rodas dentadas (z) nas tabelas de maneira a que o valor que se obtenha para o comprimento da corrente (L_c) seja múltiplo do número de prateleiras (n).

Neste caso específico em que estamos a analisar a situação em que o raio primitivo das rodas dentadas é mínimo, podemos também obter o valor do espaçamento esticado (e_{est}) de outra maneira. Sabemos que quando o valor do raio das rodas é mínimo, o troço de corrente correspondente ao espaçamento esticado de duas barras que se encontre a percorrer essa zona circular tem de ocupar metade do perímetro total da mesma roda. Para uma melhor compreensão é mostrada a Figura 12.

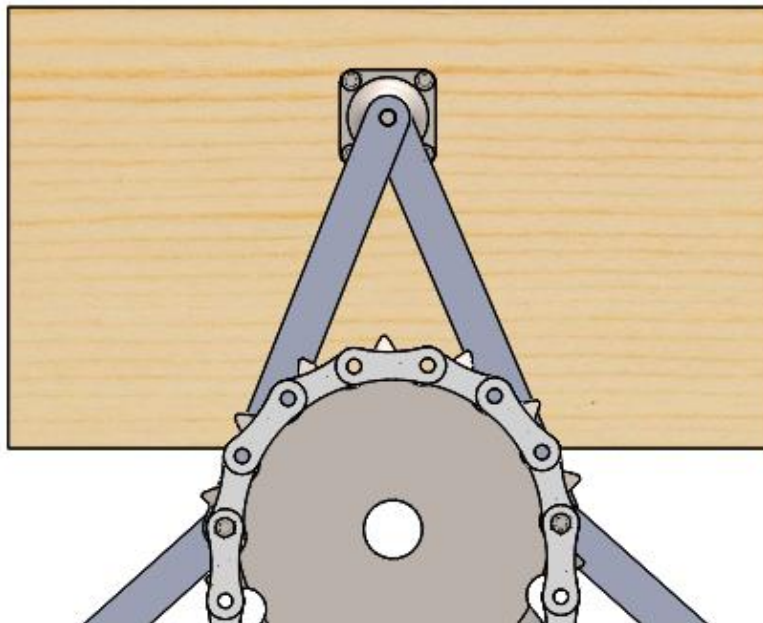


Figura 12 - Espaço ocupado pelo troço da corrente entre duas barras

Neste caso podemos então dizer que:

$$e_{est} = R_p * \pi \quad (6)$$

4.2 Parâmetros de projeto com solução

Admitamos então que, partindo primeiro dos valores dados pelos clientes e de seguida ter-se escolhido os valores necessários nas tabelas, resolvemos as equações mostradas previamente. Passamos então a ter soluções para as seguintes incógnitas:

- ✓ n – Número total de prateleiras (fornecido pelo cliente);
- ✓ $a \times b \times c$ – Comprimento, largura e altura das prateleiras respetivamente (fornecido pelo cliente);
- ✓ z – Número de dentes das rodas dentadas (retirado de tabelas);
- ✓ p – Passo da corrente (retirado de tabelas);
- ✓ Dp – Diâmetro primitivo das rodas;
- ✓ Rp – Raio primitivo das rodas;
- ✓ X – Distância entre centros;
- ✓ e_{est} - Espaçamento esticado entre as barras.

4.3 Parâmetros de projeto sem solução

4.3.1 Expressão para o comprimento das barras e para o ângulo que fazem entre si.

Até a esta fase do projeto ainda se torna bastante simples obter resultados para os parâmetros acima visto que todas as equações utilizadas têm solução. No entanto, ao continuarmos a analisar este caso, vamo-nos deparar com situações onde vamos obter várias soluções possíveis para os novos parâmetros estabelecidos.

Continuando então o dimensionamento geométrico, podemos dizer que o espaçamento esticado (e_{est}), calculado antes, pode ser relacionado, numa equação, com mais duas variáveis. São elas o comprimento das barras que irão suportar as prateleiras (l) e o ângulo que existe entre essas mesmas barras (β). Deste modo, vem então a equação (7):

$$e_{est} = 2 \times l \times \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad (7)$$

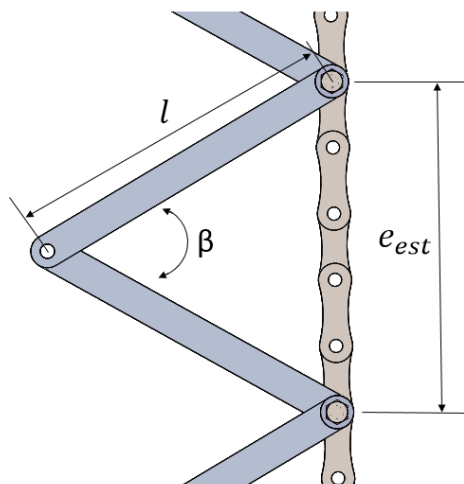


Figura 13 - Ilustração dos parâmetros espaçamento esticado, comprimento das barras e o ângulo entre elas

Como se pode observar, tanto o valor do comprimento das barras como o ângulo que estas fazem entre si são relacionadas com o espaçamento esticado através de uma simples análise trigonométrica.

4.3.2 Restrição para o ponto de fixação das prateleiras

Outra restrição que se deve ter em conta é a relativa à altura (h), que vai desde o ponto de apoio da prateleira até à sua base. Vem então a inequação [1]:

$$c > h > \frac{c}{2} \quad [1]$$

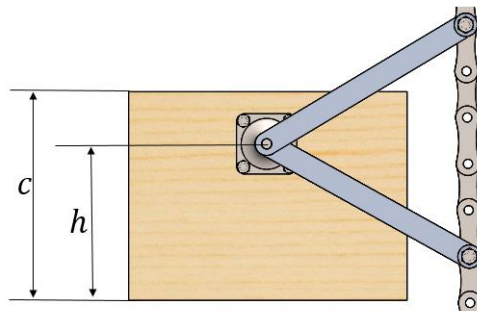


Figura 14 - Ilustração dos parâmetros de projeto referentes à altura das prateleiras e altura do ponto de apoio das mesmas

Esta restrição deve-se ao facto do ponto de apoio ter de estar sempre acima do centro de gravidade da prateleira como se pode observar na Figura 14. Caso o centro de gravidade estivesse abaixo do ponto de apoio, existiria um momento proveniente da ação da força exercida pela aceleração da gravidade que tenderia a fazer rodar a prateleira em torno desse mesmo ponto, e assim fazer a prateleira rodar totalmente para uma posição inferior. Há que frizar dois pontos muito importantes:

- Estamos a considerar que o centro de gravidade da prateleira se localiza no ponto referente ao seu centro geométrico;
- Quanto mais afastado do centro de gravidade o ponto de apoio estiver, mais estável a prateleira fica (maior o momento restituidor), mas também maior amplitude terão as oscilações.

4.3.3 Restrição para a distância entre o ponto de apoio das prateleiras e o veio que une as rodas dentadas.

Precisamos de garantir que as prateleiras não se tocam quando estas percorrem a zona semicircular. Deste modo, é apresentada a análise do comportamento das prateleiras na parte superior da caixa. Primeiro, admitimos que, nesta fase, as prateleiras não sofrem rotação relativamente ao seu ponto de apoio devido às acelerações aplicadas. Depois, consideramos que não existe, para já, um veio que une as duas rodas dentadas superiores. Por fim, e como já foi referido, relembra-se que é considerado o valor mínimo de raio primitivo para as rodas dentadas, ou seja, a flecha do arco (dy) toma o mesmo valor que o raio. Assim, precisamos de garantir que nesta zona as prateleiras não colidem entre si. Para uma melhor compreensão é mostrada a Figura 15.

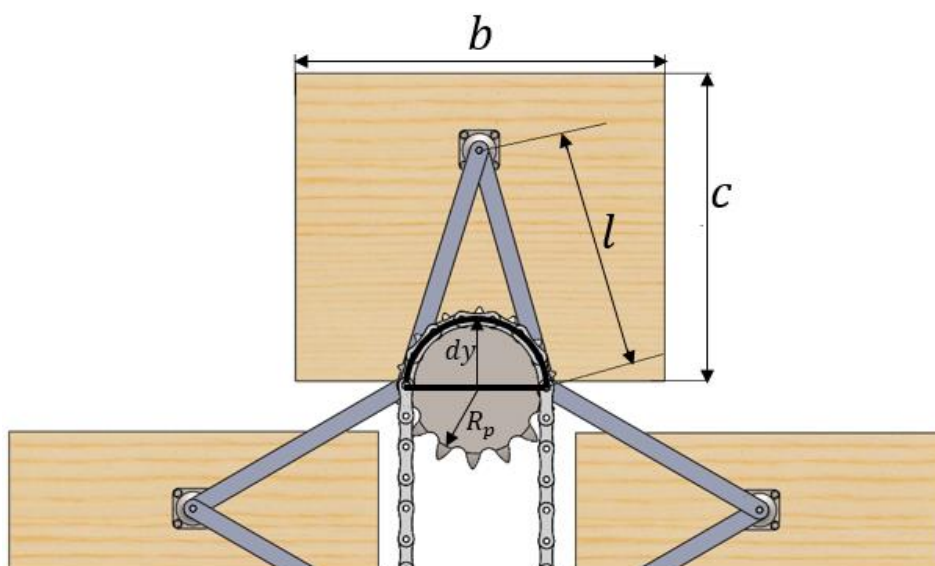


Figura 15 - Parte superior da máquina

É necessário, primeiro que tudo, estabelecer um referencial pelo qual nos vamos guiar. Considera-se o referencial ortonormado xy de origem no centro da roda dentada. Importa referir também que, para este estudo, vamos analisar apenas um grupo de barras que suportam uma prateleira. Deste modo, estabelece-se um conjunto de pontos (A,B e C) nesse grupo de barras. Esses pontos encontram-se ilustrados na Figura 16.

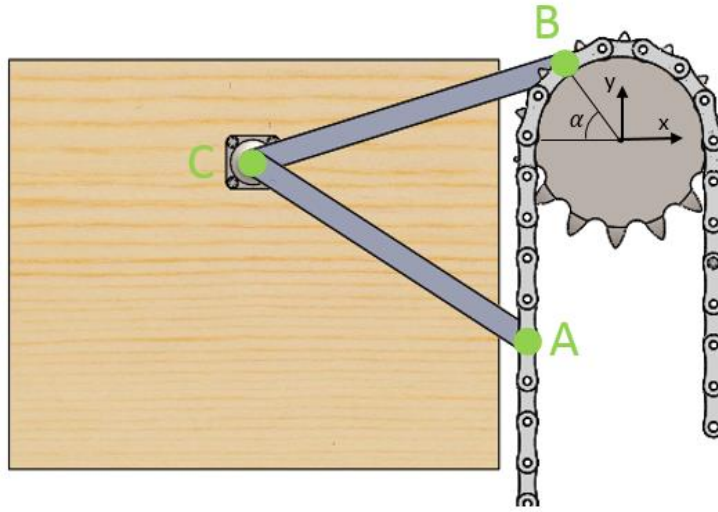


Figura 16 - Pontos A, B e C relevantes para o estudo

A primeira coisa a fazer-se é definir os pontos A, B e C relativamente ao referencial estabelecido de acordo com os parâmetros que estão identificados nas figuras. São eles o raio primitivo (R_p), o comprimento das barras (l) e o ângulo α . Cada ponto terá então as seguintes coordenadas:

$$A = \left(-R_p ; -(R_p * \pi - R_p * \alpha) \right)$$

$$B = \left(-R_p \cos(\alpha) ; R_p \sin(\alpha) \right)$$

$$C = (Cx ; Cy)$$

Visto que não é possível definir o ponto C relativamente aos parâmetros acima mencionados, opta-se por encontrar um conjunto de equações que nos definam matematicamente as componentes x e y desse mesmo ponto. Para as encontrar, utilizam-se os pontos A e B da seguinte forma: Sendo A e B os centros de duas circunferências com um raio de valor l , um dos pontos de interseção dessas circunferências será o ponto C que procuramos. Descrevendo analiticamente, é-nos possível saber o comportamento que esse ponto irá ter enquanto percorre a zona referente à roda dentada. Isto é válido para todo o α compreendido entre 0 e π radianos. Deste modo, vem o seguinte sistema de equações constituído pelas equações (8) e (9):

$$(Cx + R_p)^2 + \left(Cy + (R_p * \pi - R_p * \alpha) \right)^2 = l^2 \quad (8)$$

$$(Cx + R_p \cos(\alpha))^2 + (Cy + R_p \sin(\alpha))^2 = l^2 \quad (9)$$

Resolvendo o sistema em ordem a C_x e a C_y , obtemos as expressões que nos permitem descrever a trajetória destas duas componentes ao longo da zona curva (em anexo). A trajetória que este ponto descreve ao longo do referencial ortonormado xy já mostrado é ilustrado na Figura 17 (a azul) juntamente com uma trajetória circular (a castanho) para se conseguir perceber a diferença entre ambas.

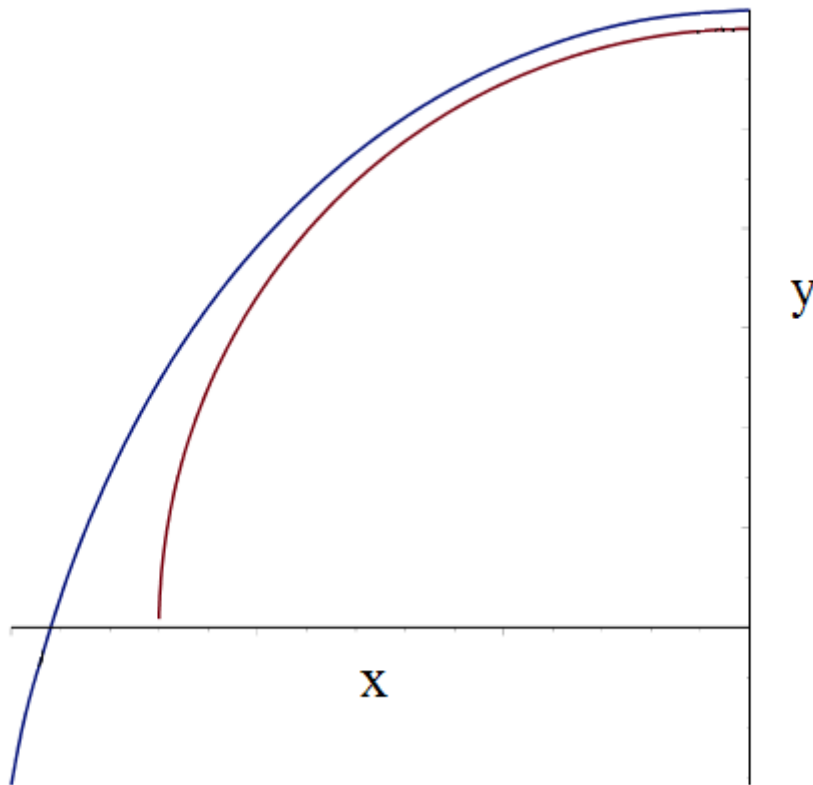


Figura 17 - Trajetória real do ponto de apoio das caixas (a azul) e uma trajetória circular (a castanho)

Deste modo, o ponto C passa a depender dos parâmetros já acima mencionados, e que na Figura 17 admite-se valores arbitrários para os mesmos. Isto significa que o ponto C é dado em função de três variáveis:

$$C(Cx, Cy) = f(R_p, l, \alpha)$$

Com esta expressão, passamos a conhecer a trajetória que o ponto C estabelece ao longo da zona curva. Sendo assim, é-nos agora possível descrever outra expressão que nos permita garantir que as prateleiras não se tocam entre si em nenhum instante. Para tal acontecer, é

preciso garantir que os seus vértices nunca se tocam como mostra um caso limite na Figura 18.

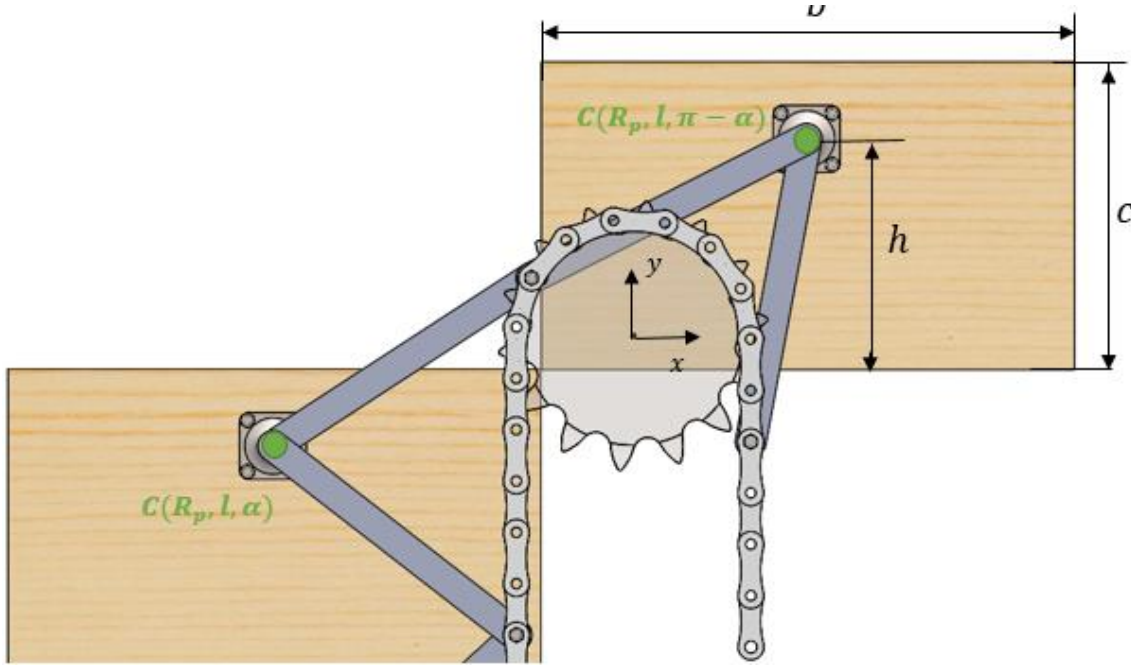


Figura 18 - Possível colisão entre as prateleiras

Podemos então dizer que se os vértices de duas prateleiras nunca se tocarem nesta zona, as prateleiras nunca se tocarão nesta mesma zona ou em zona alguma da prateleira. Assim, considera-se então as seguintes equações:

$$\begin{cases} Cx(R_p, l, \pi - \alpha) - \frac{b}{2} = Cx(R_p, l, \alpha) + \frac{b}{2} \\ Cy(R_p, l, \pi - \alpha) - h = Cy(R_p, l, \alpha) + (c - h) \end{cases}$$

Estas expressões definem o ponto exato onde as prateleiras podem colidir. Deste modo, apenas precisamos de garantir que as escolhas das cotas b e c (altura e largura das prateleiras) respeitem as expressões acima mostradas. Sendo assim, temos de resolver estas equações em ordem a essas cotas. Vêm então as equações (10) e (11).

$$b = Cx(R_p, l, \pi - \alpha) - Cx(R_p, l, \alpha) \quad (10)$$

$$c = Cy(R_p, l, \pi - \alpha) - Cy(R_p, l, \alpha) \quad (11)$$

E agora, tornando estas equações em inequações, podemos dizer que, para uma boa escolha de valores de altura e de largura das prateleiras, terá que se respeitar as restrições [2] e [3]:

$$\begin{cases} b < Cx(R_p, l, \pi - \alpha) - Cx(R_p, l, \alpha) \\ c < Cy(R_p, l, \pi - \alpha) - Cy(R_p, l, \alpha) \end{cases} \quad [2]$$

[3]

Estas inequações são válidas quando o projetista não considera que na parte superior da máquina existirá um veio de ligação entre as duas rodas dentadas, no entanto, ele pode também existir, e assim, ter-se-á que optar por outra estratégia para se poder relacionar as dimensões das prateleiras com o veio que une as rodas dentadas.

Optou-se então por se adimensionalizar as variáveis que entram nas expressões da trajetória do ponto de apoio das prateleiras. Isto acontece porque se torna extremamente difícil de estudar as expressões analíticas resultantes das equações do ponto de apoio das prateleiras (C). No âmbito do projeto de máquinas, torna-se também mais fácil para o projetista projetar esta máquina usando o método mostrado adiante. Com isto torna-se possível obter um conjunto de curvas para diferentes valores adimensionais que nos relacionam as diferentes variáveis de uma maneira prática. Começando então pela adimensionalização dos parâmetros, mostramos as equações de novo as expressões referentes à trajetória do ponto C:

$$\begin{cases} (Cx + R_p)^2 + (Cy + (R_p * \pi - R_p * \alpha))^2 = l^2 \\ (Cx + R_p \cos(\alpha))^2 + (Cy + R_p \sin(\alpha))^2 = l^2 \end{cases}$$

O próximo passo passa por adimensionalizar os parâmetros Cx , Cy , R_p , e l .

Passa-se então a dividir todas estas componentes pelo raio das rodas R_p . Sendo assim, aparecem os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\psi_x = \frac{Cx}{R_p}$$

$$\psi_y = \frac{Cy}{R_p}$$

$$\lambda = \frac{l}{Rp}$$

Com estes parâmetros, podemos reescrever as expressões apresentadas antes da seguinte maneira:

$$\begin{cases} (\Psi_x + 1)^2 + (\Psi_y + \pi - \alpha)^2 = \lambda^2 \\ (\Psi_x + \cos(\alpha))^2 + (\Psi_y + \sin(\alpha))^2 = \lambda^2 \end{cases} \quad (12)$$

$$(13)$$

As expressões de Ψ_x e de Ψ_y são mostradas em anexo e são dadas em função de α . Com elas, podemos obter uma nova expressão para a distância que vai desde o ponto de apoio das caixas até ao centro da roda dentada, a que chamamos Z . Esta distância, adimensionalizada, irá ser definida pela expressão seguinte:

$$\frac{Z}{Rp} = \sqrt{\Psi_x^2 + \Psi_y^2}$$

Onde $\frac{Z}{Rp}$ é a distância já referida adimensionalizada.

Com estas novas equações podemos construir um conjunto de curvas para valores de $\frac{l}{Rp}$ diferentes, o que faz com que tenhamos diferentes valores para esta distância adimensionalizada $\frac{Z}{Rp}$ quando se faz variar o parâmetro α . Com a ajuda do software informático *MAPLE* obtemos para diferentes valores de $\frac{l}{Rp}$ (de 2 a 7 neste caso) as suas curvas respetivas em função do ângulo α . É então apresentada a Figura 19.

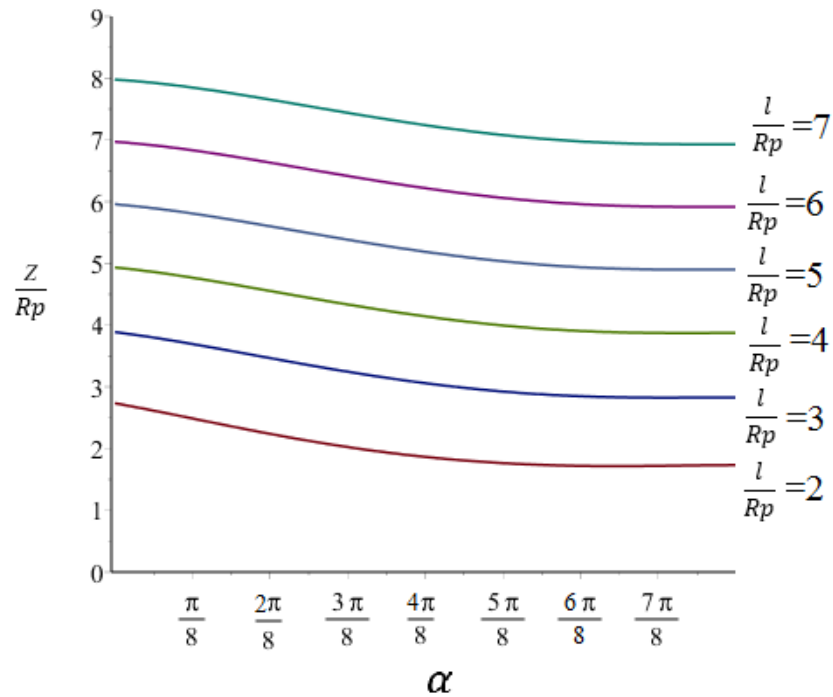


Figura 19 - Curvas da distância adimensionalizada Z para diferentes valores de $\frac{l}{R_p}$

De seguida traça-se uma curva que descreve a posição referente à distância mínima desde o ponto de apoio das prateleiras até ao centro da roda à medida que fazemos variar o valor de α . Esta curva é obtida através do cálculo dos pontos mínimos de cada uma das funções acima mostradas referentes a diferentes valores de $\frac{l}{R_p}$. Assim, com esse conjunto de pontos, torna-se possível, também através da ajuda do software informático *MAPLE*, traçar uma curva que nos dá as posições das distâncias mínimas do ponto de apoio das prateleiras até ao eixo da roda em função de α . É mostrada então a Figura 20.

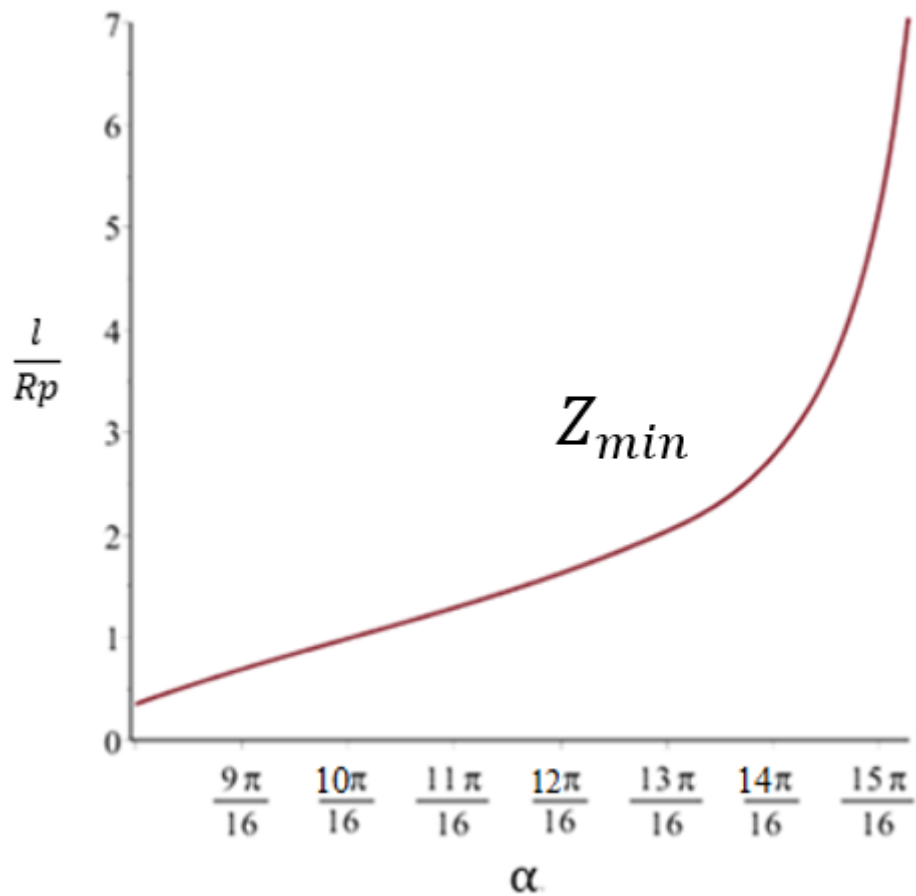


Figura 20 - Curva da posição (α) das distâncias mínimas do ponto de apoio das prateleiras até ao eixo da roda dentada dadas em função de $\frac{l}{R_p}$

Com este gráfico é agora possível saber onde se encontra a distância mínima que vai desde o ponto de apoio das prateleiras até ao eixo da roda dentada para cada um dos valores de $\frac{l}{R_p}$, e que nos vai permitir limitar as dimensões das prateleiras devido ao veio que une as duas rodas dentadas superiores. Passando a explicar a metodologia, o projetista com estes dois gráficos passa a conseguir obter a posição exata de onde se encontra essa distância mínima para um determinado valor de $\frac{l}{R_p}$. Após obtê-la, terá que satisfazer a seguinte restrição (adimensionalizada):

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2R_p}\right)^2 + \left(\frac{h}{R_p}\right)^2} < \frac{Z_{min}}{R_p} - \frac{D}{2R_p}$$

Esta restrição diz-nos que a distância que vai desde o ponto de apoio das prateleiras até a um dos vértices inferiores das mesmas terá sempre de ser menor que a distância mínima que vai desde o mesmo ponto de apoio até à circunferência descrita pelo veio. Para uma melhor compreensão desta restrição, é apresentada a Figura 21.

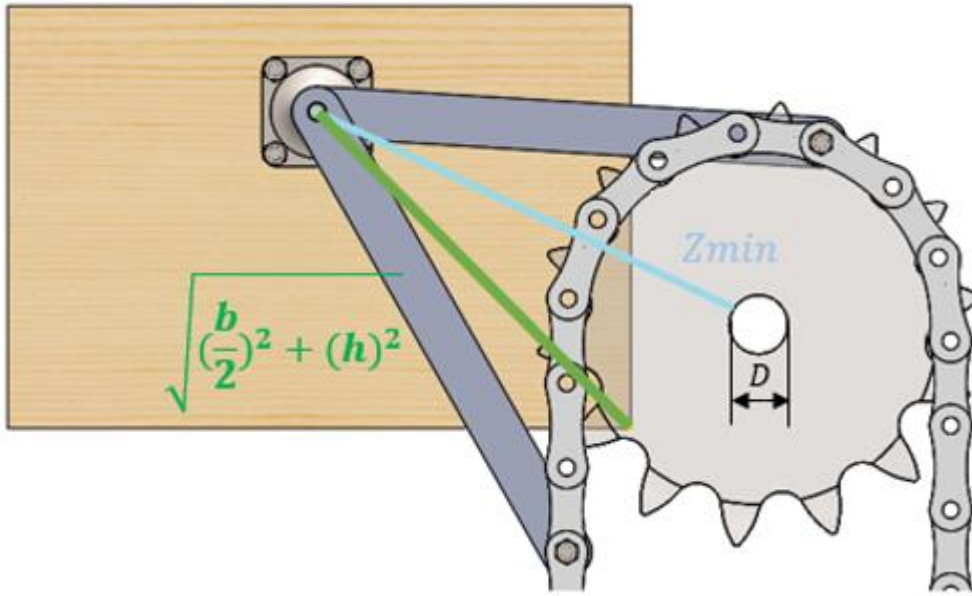


Figura 21 - Relação entre as dimensões das prateleiras e o veio que une as rodas dentadas superiores

Após o projetista ter obtido, através dos gráficos adimensionalizados, o respetivo valor de Z_{min} , torna-se possível desenvolver esta restrição imposta. Vem então:

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2Rp}\right)^2 + \left(\frac{h}{Rp}\right)^2} < \sqrt{\frac{Cx^2}{Rp} + \frac{Cy^2}{Rp}}_{min} - \frac{D}{2Rp}$$

Passando a multiplicar tudo pelo valor do raio primitivo da roda dentada R_p , vem a restrição final [4] já deduzida:

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + (h)^2} < \sqrt{Cx^2 + Cy^2}_{min} - \frac{D}{2} \quad [4]$$

Desta forma, torna-se possível dizer que caso esta restrição seja respeitada, as caixas nunca tocarão no veio que une as rodas dentadas, e podemos dizer também que se a prateleira quando passa pela zona onde o valor de distância Z é mínimo não tocar no veio, ela nunca tocará no veio em nenhuma outra posição. Com este método das adimensionalizações podem retirar-se valores concretos para o comprimento das barras que antes não era

possível fazer. O projetista apenas tem de descobrir a iterada perfeita para o caso particular em que estiver a trabalhar.

4.3.4 Restrição para a folga existente entre as prateleiras que se encontram colocadas verticalmente

Fazemos agora referência a outra restrição que tem que ver com a pequena folga que terá de existir entre cada prateleira nas zonas onde a corrente se encontra esticada, de maneira a que estas não choquem entre si caso ocorram oscilações indesejadas. Sendo assim, teremos de adicionar mais dois parâmetros. São eles o número de prateleiras que se encontram verticalmente num dos lados de onde a corrente se encontra esticada (k) e a folga que existe entre cada prateleira nesta mesma zona (f). Podemos então relacioná-las através da inequação [5]:

$$X > K \times (c + f) \quad [5]$$

Isto significa que a distância entre centros será sempre maior que a quantidade de prateleiras que se encontram verticalmente nesta zona da corrente, como se verifica na Figura 22. Importa referir que esta figura mostra também que esta distância é independente da quantidade de prateleiras que se encontram a percorrer a zona referente às rodas dentadas (no caso em estudo apenas consideramos uma, mas a imagem mostra o caso em que existem várias prateleiras nessa zona). Isto deve-se essencialmente ao facto de não se incluir as prateleiras cujas barras já iniciaram, ou estão a finalizar a rotação, pois, ao iniciar/finalizar a rotação, as prateleiras já possuem uma velocidade linear superior às que se ainda encontram a executar o movimento vertical retilíneo ascendente/descendente.

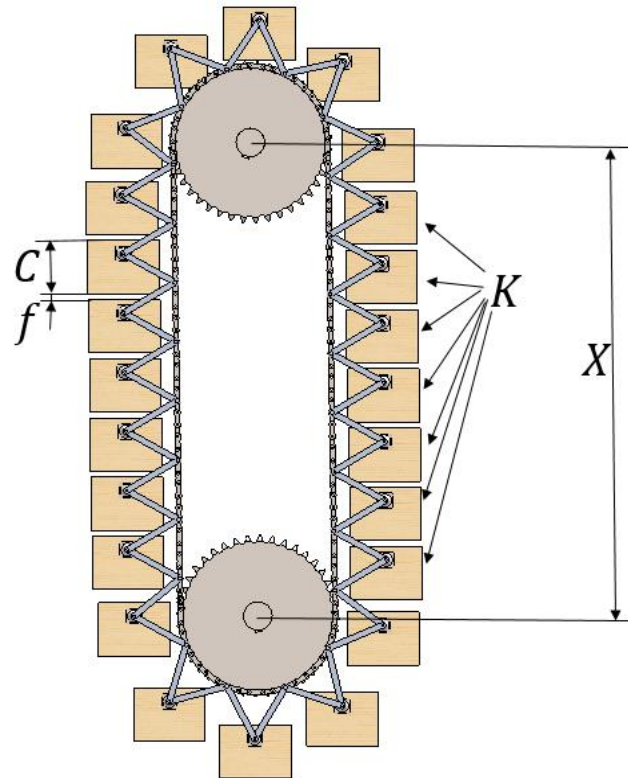


Figura 22 - Ilustração que mostra os Parâmetros de projeto referentes à distância entre centros, número de prateleiras colocadas na vertical, a altura das mesmas e a folga existente entre cada uma delas

4.3.5 Restrição para o comprimento das prateleiras

Por último, e não menos importante, é necessário estabelecer uma última inequação, a inequação [6], que é relativa ao comprimento do veio. A escolha dessa medida tem que ter em consideração o comprimento das prateleiras, sendo o comprimento do veio, obrigatoriamente maior. Isto deve-se ao facto de ter de ser escolhido uma medida que seja grande o suficiente para o veio encaixar nas rodas dentadas, e deste modo, ser-se possível colocar as prateleiras de maneira a que estas caibam na máquina. Observa-se tudo isto na Figura 23.

$$L > a \quad [6]$$

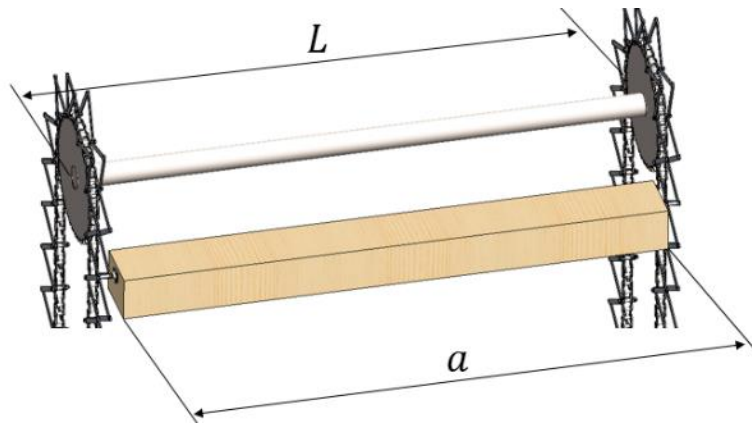


Figura 23 - Ilustração dos parâmetros de projeto referentes ao comprimento das prateleiras e do veio

4.4 Apanhado dos parâmetros de projeto com solução e sem solução

Apresenta-se agora uma pequena tabela onde é possível mostrar todos os parâmetros que entraram nesta primeira análise e o número de soluções possíveis para elas.

Parâmetros para os quais se obtém apenas um valor	Parâmetros para os quais se obtém um conjunto de valores
n (fornecida pelo cliente)	h
a (fornecida pelo cliente)	K
b (fornecida pelo cliente)	f
c (fornecida pelo cliente)	L
p (escolhida através das tabelas em anexo)	D
z (escolhida através das tabelas em anexo)	
D_p	
R_p	
X	
e_{est}	
l	
β	

Tabela 1 – Parâmetros para os quais se obtém apenas um valor e parâmetros para os quais se obtém vários valores

5 Projeto mecânico da máquina

5.1 Comportamento das prateleiras na trajetória circular

Passando agora ao dimensionamento mecânico do armazém rotativo, começamos por analisar primeiro o comportamento que a prateleira irá ter quando esta percorre a zona referente às rodas dentadas. Precisa-se de ter em atenção as diferenças tanto de velocidade como de aceleração que existem nesta zona e suas respectivas componentes horizontal e vertical. Esta é a principal razão porque fazemos a análise nessa zona. Excluimos também a análise referente aos arranques e às travagens da máquina pois assume-se que esta possui na sua constituição um controlador de velocidade do tipo conversor de frequência eletrónico, que atualmente é um dos controladores mais comuns de se utilizar. Com este dispositivo torna-se fácil a execução de arranques e travagens lentas, o que torna a influência destas acelerações quase irrelevante para as oscilações das prateleiras. Analisando cinematicamente as zonas das rodas dentadas, podemos desde logo reparar que as diferenças de velocidade e aceleração que vão existindo ao longo do percurso vão desencadear movimentos oscilatórios da prateleira em torno do seu ponto de fixação. No entanto, não queremos que esses movimentos oscilatórios se tornem demasiado elevados caso a velocidade linear que a corrente tenha seja relativamente alta. Sendo assim, subdividimos este estudo em duas análises distintas. São elas:

- 1) Análise cinemática da trajetória;
- 2) Análise das forças aplicadas na prateleira.

5.1.1 Análise cinemática da trajetória

Começando pela primeira análise, ou seja, a referente à trajetória que a prateleira irá descrever em torno do eixo da roda dentada, escolheu fazer-se na parte inferior do armazém (mostrada na Figura 27), isto é, na parte onde se encontram as duas rodas dentadas inferiores.

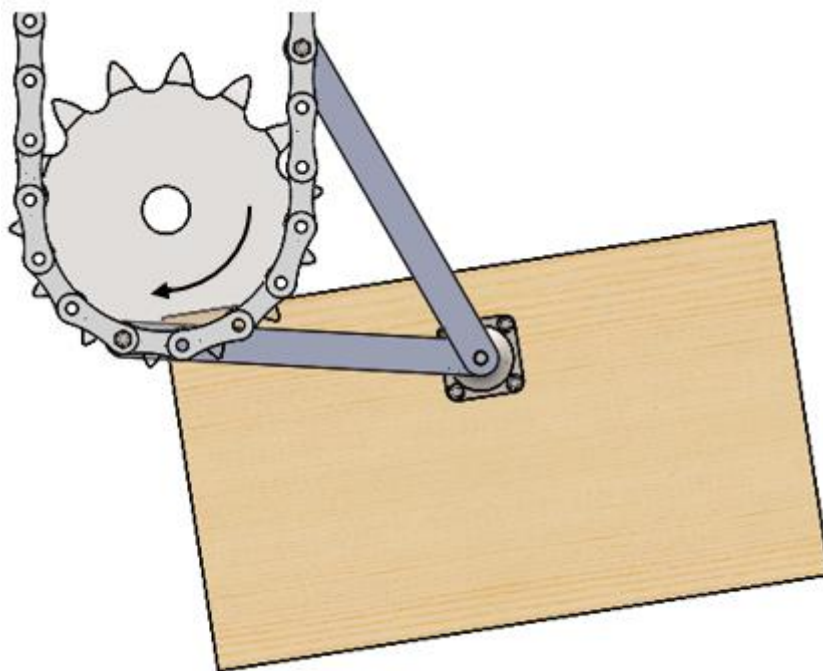


Figura 24 - Parte do armazém onde se estudará o comportamento das prateleiras

Admite-se que a trajetória definida pelas prateleiras é semicircular porque é muito difícil para este caso descrever e estudar perfeitamente a trajetória real que o ponto de apoio das prateleiras descreve. Primeiro, sabemos que a velocidade angular terá sempre o mesmo valor pois estamos a considerar que a máquina já está a funcionar à sua velocidade máxima. Vamos considerar 3 pontos fundamentais nesta trajetória. Serão denominados por pontos *I*,

II, e *III*. Para definir o sentido das velocidades e consequentemente das acelerações, iremos ter como referência um referencial ortonormado (x,y) também ilustrado na Figura 25.

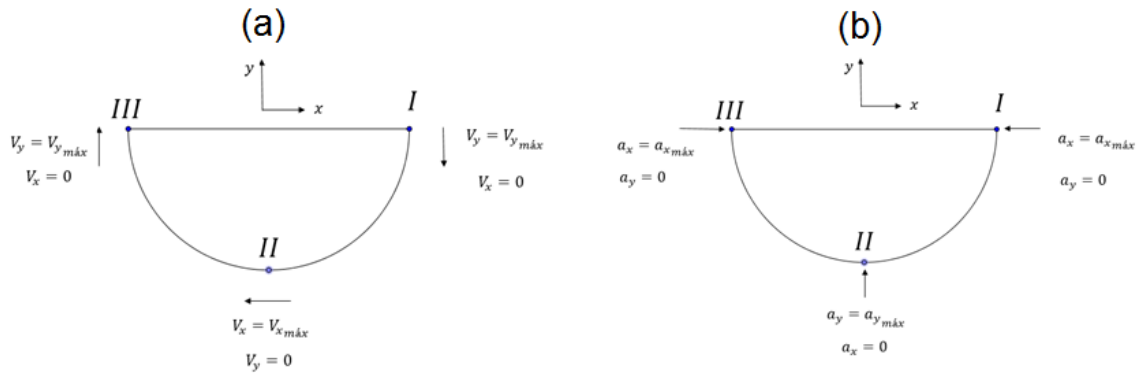


Figura 25 - Direções e intensidades das componentes x e y da velocidade (a) e da aceleração (b) nas zonas I, II e III da trajetória semicircular

Os pontos *I*, *II*, e *III* são importantes porque nesses pontos estabelecem-se valores de velocidade e aceleração máximas. Para se obter os gráficos de velocidade e de aceleração entre os pontos *I* e *III* optou-se por recorrer ao software informático *SOLIDWORKS* que nos fornece detalhadamente esses mesmos gráficos. Eis os resultados (Figura 26, Figura 27, Figura 28 e Figura 29) obtidos para cada componente de velocidade e de aceleração do ponto de apoio das prateleiras entre os pontos *I* e *III*:

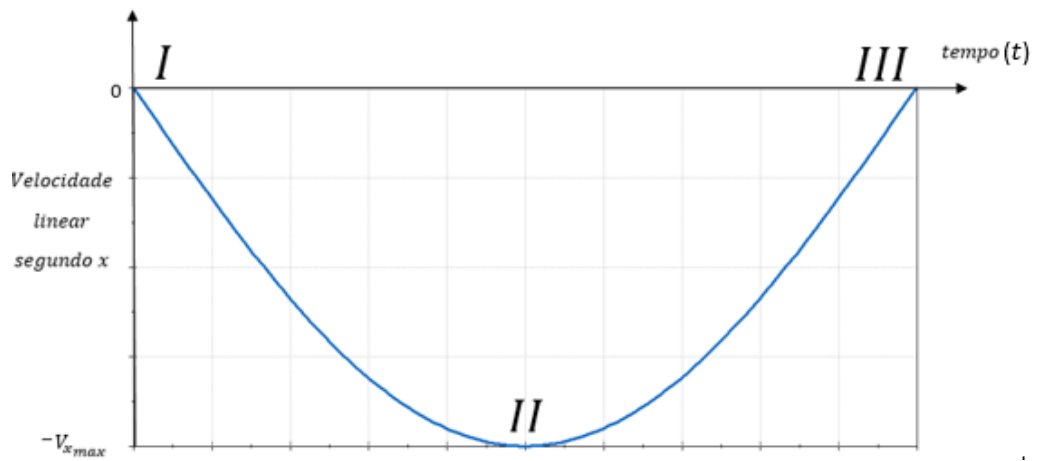


Figura 26 - Distribuição da velocidade linear segundo a componente x

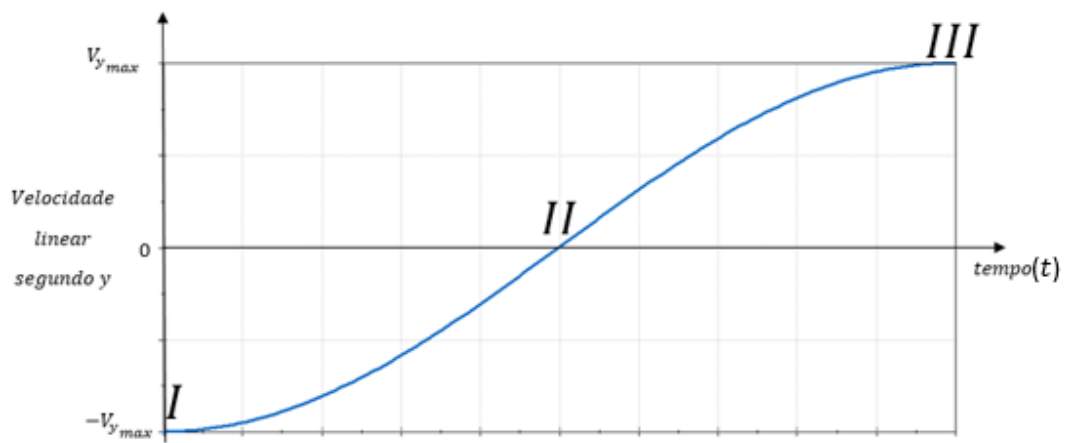


Figura 27 - Distribuição da velocidade linear segundo a componente

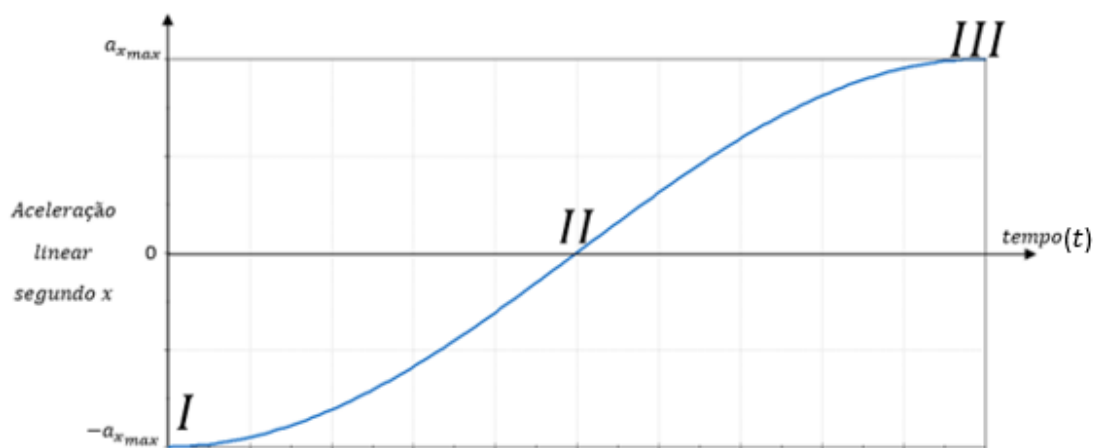


Figura 28 - Distribuição da aceleração linear segundo a componente x

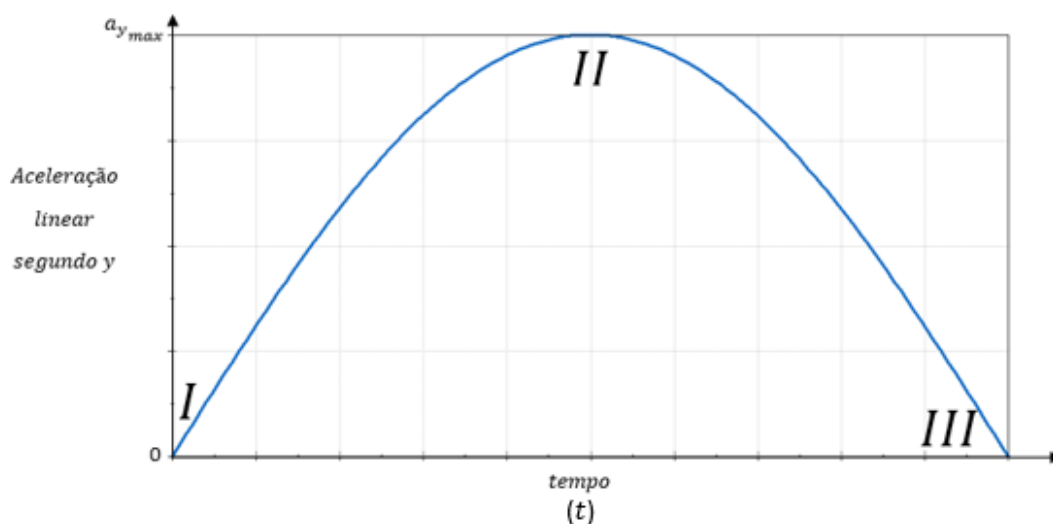


Figura 29 - Distribuição da aceleração linear segundo a componente y

Sabemos agora o comportamento de cada componente da velocidade e da aceleração ao longo da trajetória semicircular. Para escolher o ponto onde fazer a segunda análise relativa às forças aplicadas na prateleira, temos de tomar especial atenção aos gráficos de aceleração. Olhando com pormenor para ambos os gráficos, conseguimos ter uma ideia de onde a prateleira irá obter o maior valor de inclinação devido à oscilação criada pelas forças de inércia (com sentido contrário às componentes da aceleração). Sendo assim, podemos afirmar que a inclinação máxima irá dar-se entre o ponto **I** e o ponto **II**. Entre o ponto **II** e o ponto **III** a prateleira irá ter tendência a regressar à posição em que se encontrava antes de

percorrer a zona semicircular, isto porque as acelerações irão ter sentidos opostos aos observados entre os pontos *I* e *II* (de lembrar que a máquina funciona no sentido horário relativamente ao lado em que se encontra o motoredutor).

5.1.2 Análise das forças aplicadas nas prateleiras

Dando agora início à segunda análise, estabelecem-se primeiro as equações das forças aplicadas na prateleira através da aplicação da segunda lei de Newton. Nesta análise irão entrar novas variáveis. São elas a força centrípeta que puxa a prateleira para o centro da roda dentada (\vec{F}_c), a força exercida pelo seu peso (\vec{P}) e a respectiva força normal (\vec{N}), as forças de inércia e as reações resultantes da junção das componentes do peso com a força centrípeta. De notar a massa (m), usada mais á frente nos cálculos, é a junção de dois valores. São eles a massa da carga (m_{carga}) que nos é dado pelo cliente logo ao início, e a massa da prateleira ($m_{prateleira}$), que ainda desconhecemos. Observando o diagrama de forças apresentado na Figura 30 podemos começar a estabelecer as equações de equilíbrio dinâmico.

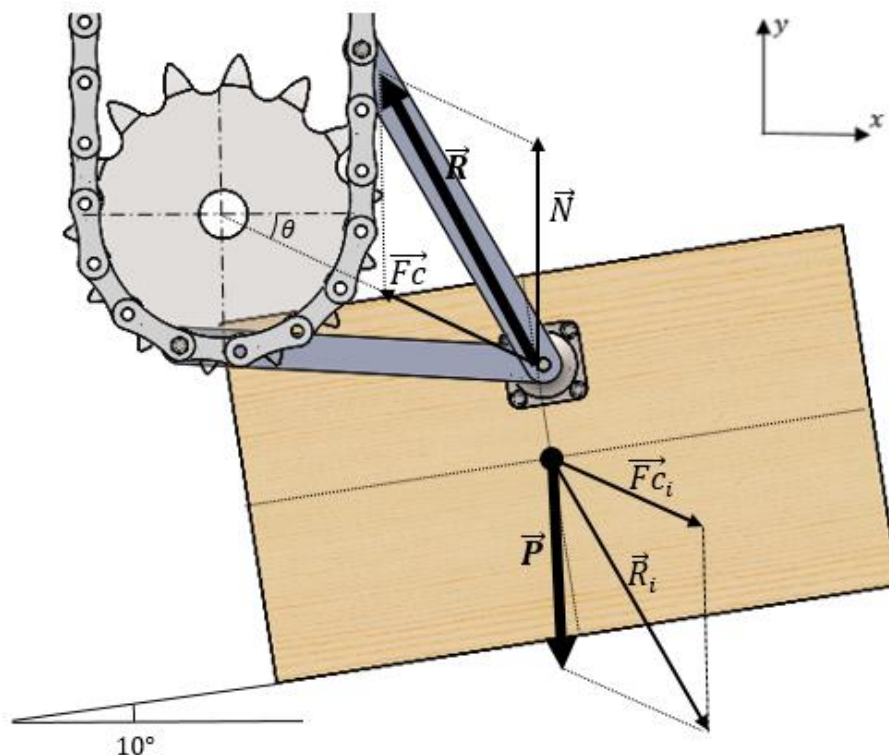


Figura 30 - Diagrama de corpo livre da prateleira

De notar que estão representadas todas as forças presentes neste caso, no entanto, para aplicar a 2ª lei de Newton, apenas nos vão interessar as seguintes forças: o peso (\vec{P}), a normal (\vec{N}) e a força centrípeta (\vec{F}_c).

$$\begin{cases} \sum F_x = m\vec{a} \\ \sum F_y = m\vec{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\vec{F}c \cos(\theta) = -m\vec{a}_x \\ \vec{F}c \sin(\theta) - \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}_y \end{cases}$$

Ao longo desta trajetória, que foi admitida como sendo semicircular, haverá uma posição na qual a caixa deixa de rodar no sentido anti-horário e começará a rodar no sentido inverso de maneira a voltar à sua posição inicial. Deste modo, faz sentido dizer que existe um determinado ângulo θ ao qual corresponde esse momento de transição. Assim, nesse instante exato, o momento que provoca rotação na prateleira deixa de atuar (ou passa a ser zero), a resultante das forças que atuam no centro de massa do corpo (\vec{R}_i) tem um valor igual, mas simétrico, à resultante das forças que atuam no suporte da prateleira (\vec{R}). No entanto, nestas condições, não podemos saber a posição exata da prateleira, isto é, o ângulo θ a que corresponde essa mesma posição, o que torna muito difícil obtermos um valor concreto para a velocidade de rotação ω admissível para a máquina desta maneira. Assim, passa-se a utilizar outro método. Para efeitos de cálculo, considera-se então que a prateleira terá a inclinação de 10° e que nunca a poderá ultrapassar no ponto correspondente à zona de transição. Com isto, torna-se insuficiente usar as equações do equilíbrio de forças, o que nos leva a analisar o equilíbrio de momentos aplicados. O que podemos dizer relativamente aos momentos é que no ponto corresponde à zona de transição, o somatório de momentos será igual a zero, isto porque todas as forças que estão a atuar na prateleira neste preciso instante contribuem para que a prateleira se encontre em equilíbrio estático nesse momento.

Será então através da equação dos momentos que iremos limitar a velocidade de rotação máxima para esta máquina. Para isto, temos que ter em consideração as forças de inércia aplicadas no corpo. Para este cálculo, apenas vão ser consideradas as forças aplicadas no centro de massa da prateleira visto que as que se encontram aplicadas no ponto de apoio não provocam momento. Definindo então matematicamente a expressão, vem:

$$\sum M = 0 \Rightarrow$$

$$-\left(h - \frac{c}{2}\right) \text{sen}(10^\circ)(\vec{P}) - \left(h - \frac{c}{2}\right) \text{sen}(10^\circ)\vec{F}_c \text{sen}(\theta) + \left(h - \frac{c}{2}\right) \cos(10^\circ)\vec{F}_c \cos(\theta) = 0$$

Sabendo que a força centrípeta é dada pelo produto da massa da prateleira com a respetiva aceleração centrípeta, e simplificando a expressão, vem:

$$m\vec{a}_c \cos(10^\circ)\cos(\theta) = (\vec{P})\text{sen}(10^\circ) + m\vec{a}_c \text{sen}(10^\circ)\text{sen}(\theta)$$

Podemos ainda substituir algumas das incógnitas que temos em cima. Começando pelo peso da prateleira \vec{P} . Esta força pode ser também escrita da seguinte forma:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

em que m é a massa da prateleira e \vec{g} é a aceleração da gravidade. Vem então:

$$m\vec{a}_c \cos(10^\circ)\cos(\theta) = m\vec{g}\text{sen}(10^\circ) + m\vec{a}_c \text{sen}(10^\circ)\text{sen}(\theta) \Rightarrow$$

$$\vec{a}_c \cos(10^\circ)\cos(\theta) = \vec{g}\text{sen}(10^\circ) + \vec{a}_c \text{sen}(10^\circ)\text{sen}(\theta)$$

Outra das simplificações que é possível fazer-se tem que ver com a aceleração que incide sobre a prateleira e que é provocada força centrípeta. Essa aceleração pode ser definida através do produto do quadrado do valor da velocidade de rotação pelo raio da circunferência que vai desde o centro do veio até ao apoio das prateleiras, isto é:

$$\vec{a}_c = \omega^2 * R$$

O raio R encontra-se ilustrado na Figura 31 e também se obtém facilmente quando se admite que o movimento descrito pelas prateleiras é semicircular (porque se admite que este valor se mantém constante ao longo da trajetória circular). Heis a equação (14)

$$R = R_p + l \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad (14)$$

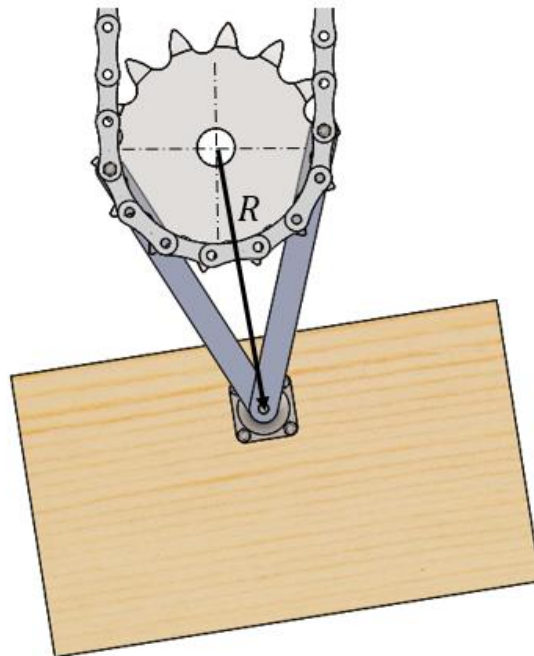


Figura 31 - ilustração do raio R

Com esta nova simplificação, passamos a escrever a expressão de uma outra forma:

$$\omega^2 R \cos(10^\circ) \cos(\theta) = \vec{g} \sin(10^\circ) + \omega^2 R \sin(10^\circ) \sin(\theta)$$

Resolvendo e ordem ao parâmetro da velocidade de rotação, vem a equação (15):

$$\omega = \sqrt{\frac{\vec{g}}{R \left(\frac{\cos(\theta)}{\tan(10)} - \text{sen}(\theta) \right)}} \quad (15)$$

Conclui-se que a velocidade de rotação depende sempre do ângulo θ ficando assim dependente do valor deste parâmetro.

5.2 Dimensionamento mecânico do veio

Neste tópico dimensiona-se o veio que une as rodas dentadas. Para tal, analisam-se os esforços relativos à torção que possam vir a existir neste elemento da máquina.

A torção é o esforço interno que ocorre quando são aplicados momentos contrários nas secções de um veio. Esses momentos nas secções transversais tendem a torcer, e consequentemente, deformar a peça. Estes momentos têm sentidos contrários, mas valores de intensidade iguais.

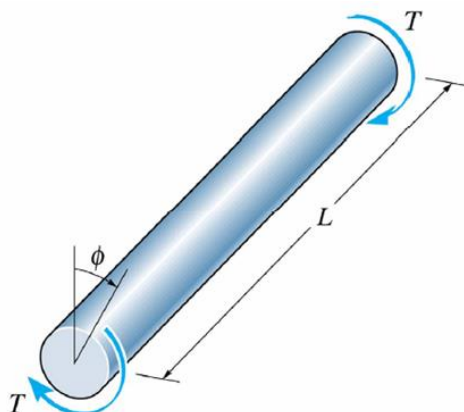


Figura 32 - Veio de comprimento L sujeito a momentos de torção T

Nesta máquina, este fenómeno pode ocorrer, por exemplo, devido a algum obstáculo que possa travar o normal funcionamento de todo o sistema. No entanto, no momento desta travagem, é normal que o motor tente combatê-lo adicionando mais binário, o que provoca uma torção do veio que une as rodas e, consequentemente, dessincroniza todo o sistema.

Começando então a análise, considera-se que ambos os veios são maciços de raio $(\frac{D}{2})$ e são produzidos num aço vulgar. Uma importante condição que terá que ser imposta logo à partida é o ângulo de torção máximo admissível (ϕ) a que o veio poderá estar sujeito. Consideramos que este ângulo nunca poderá ultrapassar um valor de $0,5^\circ$ ($0,0087$ rad), isto porque caso acontecesse uma torção onde o ângulo ascendesse este valor, ambas as correntes que são usadas em cada extremidade da máquina tenderiam a dessincronizar, o que faria com que as prateleiras não se mantivessem numa posição horizontal e, consequentemente, afetaria todo o funcionamento da máquina. O que se pretende neste tipo de armazém é que ambas as correntes que ligam as rodas dentadas superiores e inferiores de cada extremidade estejam perfeitamente sincronizadas entre si, de maneira a que as prateleiras apenas possuam um grau de liberdade (rotação em torno do seu ponto de apoio)

e que possam estabelecer o movimento solidário com o de ambas as correntes. Se o sincronismo se verificar, como é esperado, as prateleiras estarão restringidas nos três graus de liberdade referentes à translação e a dois referentes à rotação. Para tal acontecer, as propriedades deste tipo de aço são importantes para estes cálculos. Vamos precisar dos valores do módulo de rigidez (G) e de tensão admissível ao corte (τ_{adm}). Admitimos os valores para um aço vulgar de $G = 80 \text{ GPa}$ e de $\tau_{adm} = 65 \text{ MPa}$. Também é preciso ter em atenção que o nosso veio, ao ser maciço e de secção circular, possui um momento polar de inércia (J) que irá depender diretamente do seu raio ($\frac{D}{2}$). Por último, é apresentada uma nova variável que ainda não tinha sido mostrada anteriormente. Trata-se do momento de torção (T) a que a barra irá estar sujeita. Consideramos que este momento terá um valor três vezes superior ao binário nominal do motor que fará mover toda a estrutura da máquina. Vêm então as equações e (16) e (17):

$$\tau = \frac{T * \rho}{J} \quad (16)$$

$$\phi = \frac{TL}{JG} \quad (17)$$

A tensão de corte máxima e o ângulo de torsão máximo admissível podem ser observados nas ilustrações da

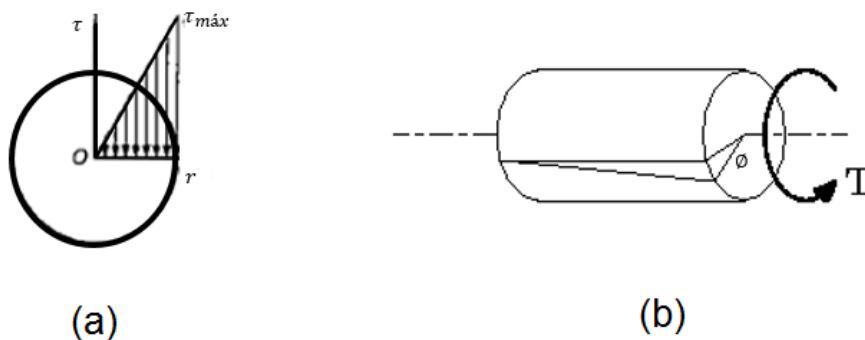


Figura 33 - Distribuição das tensões de corte ao longo da secção do veio (a) e ângulo de torção máximo admissível (b)

Como sabemos que o ângulo de torsão nunca pode ser superior a $0,5^\circ$ ($0,0087 \text{ rad}$) e que o valor da tensão admissível (65 MPa) não pode ser excedido, as duas equações mostradas em cima passam a funcionar como restrições. Importa também mencionar que, a expressão

do momento polar de inércia (J) de um de secção circular de um veio maciço de raio $(\frac{D}{2})$ é dada pela equação (18):

$$J = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{D}{2}\right)^4 \quad (18)$$

Substituindo já os valores e as expressões que conhecemos, chegamos à inequação [7] e inequação [8]:

$$\begin{aligned} \tau_{adm} &> \frac{T \times \frac{D}{2}}{J} \Rightarrow \\ \Rightarrow 65 \times 10^6 &> \frac{T \times \frac{D}{2}}{\frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{D}{2}\right)^4} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{T}{D^3} &< 12,7 \text{ MPa} \end{aligned} \quad [7]$$

$$\begin{aligned} \emptyset &> \frac{T \times L}{J \times G} \Rightarrow \\ \Rightarrow 0,0087 &> \frac{T \times L}{\frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{D}{2}\right)^4 \times 80 \times 10^9} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{T \times L}{D^4} < 136,6 \text{ MPa} \quad [8]$$

Foi então possível estabelecer mais duas inequações que dependem apenas de três incógnitas.

5.3 Cálculo da expressão da potência total a fornecer ao sistema

Passa-se agora a uma das fases do projeto onde se estabelece as equações da potência. Trata-se do cálculo da expressão da potência transmitida pelo motor à máquina. Torna-se difícil estimar este valor porque, devido a existirem muitas incertezas, ter-se-á de recorrer a estimativas e aproximações para o seu desenvolvimento. Começemos então por definir a equação geral da potência (P), dada pela equação (19). Este valor é-nos dado pela divisão de uma quantidade de energia gasta (ΔE) num certo intervalo de tempo (Δt). Ou seja:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad (19)$$

Podemos considerar esta equação apresentada como sendo a equação que define, da maneira mais simples, o significado deste valor. No entanto, no nosso caso, irá estar mais desenvolvida pois irão entrar diferentes tipos de energia para o seu cálculo. Podemos dividir a expressão total da potência em quatro partes. São elas as potências associadas às energias cinética e potencial que existem ao longo deste sistema, a potência que está associada ao arranque de todo ele, e por último, mas não menos importante, a potência necessária para vencer as forças de atrito que estão aplicadas ao longo de todo o armazém. Resumindo, temos quatro valores que vamos ter de analisar para conseguir encontrar uma expressão que defina a potência total que o motor terá de transmitir à máquina para que esta funcione sem problemas. O que se faz nestes casos é fazer-se uma análise da pior situação possível a que o motor poderá estar sujeito. Assim, podemos garantir que o motor consegue transmitir movimento ao sistema seja qual for a situação. Começamos então por identificar cada novo valor de potência:

P_{Ec} – Potência associada à energia cinética

P_{Ep} – Potência associada à energia potencial

P_{arr} – Potência associada ao arranque do sistema

P_{atr} – Potência associada às forças de atrito

P_{TOT} – Potência total a ser transmitida pelo motor ao sistema

Relacionando todas estes valores, mostra-se a equação (20):

$$P_{TOT} = P_{Ec} + P_{Ep} + P_{arr} + P_{atr} \quad (20)$$

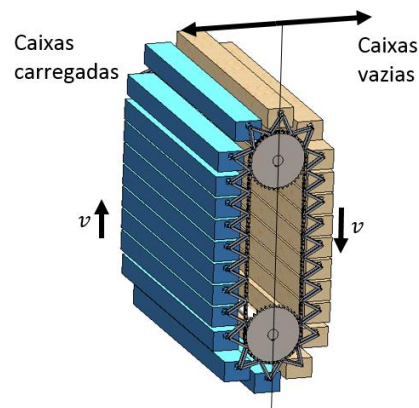


Figura 34 - Ilustração das prateleiras carregadas (a azul) e das prateleiras descarregadas (a castanho)

É apresentado agora a situação, através de da Figura 34, em que o motor terá de realizar o maior esforço para que o sistema entre em movimento. Trata-se do caso em que as prateleiras estão carregadas apenas de um dos lados, ou seja, o motor terá de transmitir movimento ascendente às que se encontram carregadas (representadas a azul), e movimento descendente às que estão vazias (representadas em castanho). De notar que consideramos que a prateleira que se encontra na zona inferior e que coincide com a linha que divide os dois lados do armazém se encontra cheia, ao contrário da prateleira superior, que se encontra vazia.

Antes de analisar cada potência singularmente, temos que fazer referência ao intervalo de tempo que vamos considerar para este caso em que o motor executa o arranque. Esse intervalo nunca poderá ascender o valor de 2 segundos porque, nesse caso, correríamos o risco de o motor sobreaquecer. Para efeitos de cálculo, esse intervalo de tempo na fase do arranque irá tomar o valor de 2 segundos. No entanto, também não seria prudente escolher um intervalo de tempo muito pequeno porque, além de considerarmos que esta máquina possui um variador de velocidade, quanto mais pequeno fosse esse valor de tempo, maiores seriam as acelerações aplicadas em cada prateleira e, conseqüentemente, estas estariam sujeitas a maiores oscilações.

5.3.1 Potência associada à energia Cinética

Começando pela potência associada à energia cinética (P_{Ec}), tem de se referir que é a potência associada à velocidade de todas as prateleiras, estejam elas vazias ou cheias. Para se calcular este valor, é preciso conhecer a expressão que permite calcular a energia cinética de um corpo e saber aplica-la ao caso em questão. A energia cinética depende sempre da massa do corpo e da velocidade nominal que este possui durante o seu movimento ($E_c = \frac{1}{2}mv^2$). Importa também dar importância ao facto de, neste caso específico, para facilitar os cálculos, se considerar que a velocidade nominal é igual tanto durante o movimento retilíneo como no movimento circular, o que na verdade não acontece, pois, a velocidade linear na zona circular do armazém é sempre superior à velocidade linear na zona retilínea. Importa lembrar também que a expressão da massa (m), já anteriormente considerada, é a soma da massa da prateleira ($m_{prateleira}$) com a massa da carga (m_{carga}). Como a expressão da potência dá, em termos práticos, a quantidade de energia necessária a fornecer num intervalo de tempo, podemos logo concluir que, assim que a máquina trabalha a velocidade constante (velocidade nominal), a potência a fornecer relativa a este tipo de energia é nula.

Vem então a equação (21):

$$P_{Ec} = \frac{\Delta E_c}{\Delta t} = 0 \quad (21)$$

5.3.2 Potência associada à energia potencial

Focando-se agora na Potência associada à energia potencial, é necessário fazer-se referência também a alguns pontos importantes. Primeiro, é necessário conhecer-se a expressão matemática que permite calcular a energia potencial que um corpo possui durante uma variação de altura $E_p = mg\delta$. Relativamente a simplificações que importa referir, começa-se por considerar que a variação de altura percorrida pelas prateleiras na zona circular do armazém relativa às rodas dentadas não é relevante para este cálculo pois, não só o número de prateleiras nesta zona é reduzida comparativamente com as que se encontram na zona retilínea, como também a variação de altura é muito menor do que as que percorrem um troço reto. Também podemos desde logo simplificar a expressão usando apenas um valor de massa, ou seja, a massa da carga (m_{carga}). Isto é possível de se fazer porque a energia potencial relativa à prateleira que se encontra a subir num dos lados da máquina é compensada na descida das prateleiras do lado oposto, fazendo com que as energias referentes à variação de alturas, e que são relativas a este valor de massa, se anulem. Por último, a variação da altura no troço retilíneo que vamos considerar pode ser dada pela multiplicação velocidade nominal a que a prateleira está sujeita pelo respetivo intervalo de tempo. Esta velocidade equivale à velocidade nominal da corrente (v). Traduzindo esta variação de altura matematicamente, temos:

$$\delta = v \times \Delta t$$

Mostra-se agora a expressão final da potência associada à energia potencial dada pela equação (22):

$$P_{Ep} = \frac{\frac{n}{2} \times m_{carga} \times g \times v \times \Delta t}{\Delta t} = \frac{1}{2} \times n \times m_{carga} \times g \times v$$

$$P_{Ep} = \frac{1}{2} \times n \times m_{carga} \times g \times v \quad (22)$$

Para esta expressão, entra apenas a massa da carga que está em metade das prateleiras, razão pela qual se considera apenas metade do número de prateleiras ($\frac{n}{2}$).

5.3.3 Potência associada ao arranque do sistema

Passando agora à potência associada ao arranque do sistema, é usada uma expressão simples que relaciona a força que está a ser aplicada nas prateleiras com a sua velocidade nominal ($P_{arr} = F \times v$). Esta força a que a prateleira está sujeita é obtida através da segunda lei de Newton. Considera-se de novo que a velocidade nominal é igual tanto na zona retilínea como na zona circular. Por último, importa referir como vamos calcular a aceleração que irá incidir nas prateleiras. Esta aceleração irá ser dada pela divisão da velocidade nominal pelo intervalo de tempo referente ao arranque, isto é, o intervalo de tempo necessário para a prateleira atingir essa mesma velocidade que, como já foi referido previamente, vamos considerar que terá um valor de dois segundos. De notar que apenas estamos a considerar os cálculos relativos às prateleiras excluindo qualquer outro componente da máquina, no entanto, na massa da prateleira, estão incluídas as massas dos componentes móveis inerentes a cada prateleira. Convém também referir que é desprezada a energia necessária para colocar os vários carretos em rotação. Sendo assim, vem:

$$\begin{aligned} P_{arr} &= F \times v = \\ &= \left(n \times m_{prateleira} + \frac{n}{2} \times m_{carga} \right) \times a \times v = \\ &= \left(n \times m_{prateleira} + \frac{n}{2} \times m_{carga} \right) \times \frac{v}{2} \times v \end{aligned}$$

Substituindo valores que já conhecemos, e simplificando, temos a equação (23):

$$P_{arr} = \frac{1}{4} (2 \times n \times m_{prateleira} + n \times m_{carga}) \times v^2 \quad (23)$$

5.3.4 Potência associada às forças de atrito

Por último, temos ainda a potência relacionada com as forças de atrito. Este valor é impossível de calcular nesta fase do projeto, visto que os elementos materiais da máquina ainda não estão definidos. Seria necessário sabermos as forças de atrito que estariam aplicadas entre todos os constituintes da máquina tais como as anilhas, as barras, os parafusos, as porcas, os apoios das prateleiras, etc, no entanto, estes elementos ainda não estão definidos. Assim, teremos que estimar todos esses valores de força para os aplicar na expressão da potência. Com base em dados experimentais de outras máquinas semelhantes, os valores de potência associados ao atrito representam cerca de 15% da potência total. Vem então a equação (24):

$$P_{atr} = 0,15 \times (P_{Ec} + P_{Ep} + P_{arr}) \quad (24)$$

Significa isto que, ao nosso valor final de potência, temos de adicionar o equivalente a 15% da soma das três primeiras potências calculadas, e assim obter este valor por via de uma aproximação.

5.3.5 Potência total

Juntando agora todas as expressões deduzidas atrás, mais concretamente as equações (21), (22), (23), (24), nasce então a equação (25):

$$P_{TOT} = 1,15 \times \left(0 + \frac{1}{2} \times n \times m_{carga} \times g \times v + \frac{1}{4} (2 \times n \times m_{prateleira} + n \times m_{carga}) \times v^2 \right) \quad (25)$$

Nesta fase, ainda não é possível obter os valores de potência porque para isso precisaríamos de conseguir saber o valor da velocidade linear v . Esse valor seria possível obter se se conseguisse encontrar um valor concreto para a velocidade de rotação máxima admissível para a máquina (no capítulo relativo às forças aplicadas na prateleira). Deixa-se então estes valores de potência indeterminados por agora.

6 Tabelas de síntese

6.1 Tabela de parâmetros

Esquematiza-se agora, após a análise feita, todos os parâmetros e equações obtidas onde é possível obter apenas uma solução, e onde é possível obter mais que uma.

Parâmetros com uma solução	Parâmetros com várias soluções
n (fornecida pelo cliente)	h
a (fornecida pelo cliente)	K
b (fornecida pelo cliente)	f
c (fornecida pelo cliente)	L
m_{carga} (fornecida pelo cliente)	ω
p (escolhido nas tabelas em anexo)	v
z (escolhido nas tabelas em anexo)	m_{caixa}
D_p	D
R_p	T
X	
e_{est}	
l	
β	
R	

Tabela 2 – Primeira atualização da tabela de parâmetros de projeto com um e vários valores possíveis de se obter

7 Condições admitidas para desacoplar o projeto

Numa primeira fase, como se pode ver, o procedimento feito para a resolução deste projeto está longe de ter uma única solução possível, isto porque existem muitos parâmetros que podem tomar vários valores. Mencionando o teorema 3 da teoria axiomática de projeto, quando o número de parâmetros de projeto (DPs) é superior ao número de requisitos funcionais (FRs), o projeto ou é redundante ou é acoplado, o que se verifica neste caso. Por outro lado, o teorema 4 da teoria axiomática diz que um projeto ideal é aquele cujo número de parâmetros de projeto (DPs) é igual ao número de requisitos funcionais (FRs) e que estes requisitos são sempre independentes uns dos outros. Visto que é impossível tornar este projeto num projeto ideal, opta-se então por transformá-lo num projeto desacoplado ou desacoplável de maneira a que, no fim, esteja o mais próximo possível de um projeto ideal. Assim, para se conseguir restringir o número de soluções possíveis começou-se a relacionar, de algum modo, variáveis entre si de maneira a reduzir o seu número e assim conseguir um conjunto de soluções cada vez menor. O que se faz agora é restringir algumas medidas e admitir valores para certos parâmetros que a máquina irá poder tomar, fazendo-se um projeto um bocado mais especificado.

As novas condições que se estabelecem para este projeto são as seguintes:

7.1 Condição 1

A variável h , que vai desde a base das prateleiras até ao seu ponto de apoio, passa agora a ter uma cota, sendo a sua medida $\frac{3}{4}c$. Este novo valor significa que a prateleira ficará fixada exatamente a meio da cota que vai desde o seu centro de massa até ao seu topo. Apresenta-se então a primeira condição com a ajuda da Figura 35:

$$h = \frac{3}{4}c$$

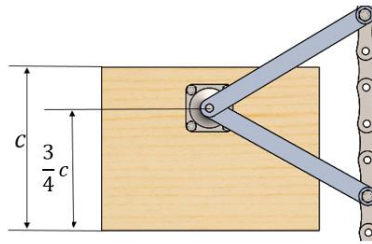


Figura 35 - Condição para a altura h

7.2 Condição 2

Para a folga que existirá entre as prateleiras (f) é dado um valor mínimo de 10% da altura das mesmas, ou seja,

$$f = 0,1 \times c$$

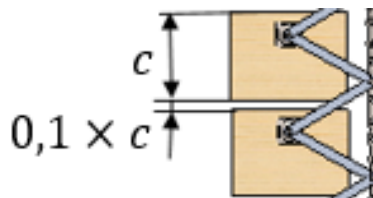


Figura 36 - Condição para a folga f

7.3 Condição 3

Passa-se a estabelecer uma equação para a massa da prateleira. Dizemos que a massa da carga poderá tomar valores até 5 vezes mais do que o valor da massa da prateleira. Matematicamente vem:

$$m_{prateleira} = \frac{m_{carga}}{5}$$

Com esta condição, tanto a configuração interior das prateleiras como o material que será usado para a sua construção numa fase mais avançada do projeto, terá de respeitar as condições da equação acima mencionada (esta análise não será abordada neste trabalho).

7.4 Condição 4

Para a medida de comprimento L do veio que une as duas rodas dentadas podemos estabelecer uma condição de dependência relativamente à cota que define o comprimento da prateleira a . Podemos estabelecer que o comprimento do veio excede em 20% o valor do comprimento da prateleira, portanto fica:

$$L = 1,2 \times a$$

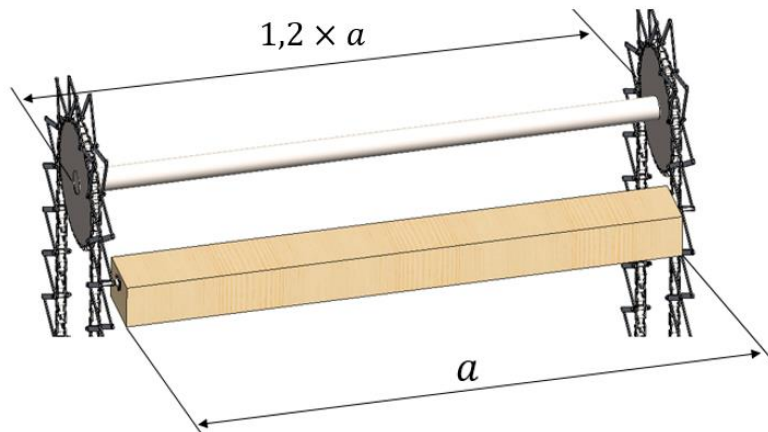


Figura 37 -Condição para o comprimento do veio

Esta equação apresentada é usada para se conseguir facilitar os cálculos, no entanto, caso ela venha a ser mesmo aplicada no projeto da máquina, no comprimento do veio, há que ter em conta as medidas das espessuras dos componentes à parte das prateleiras, isto é, tanto das rodas dentadas, como das barras e anilhas usadas. No nosso caso, consideramos que, nos 10% de comprimento que o veio tem a mais em cada lado, inclui-se duas medidas de espessura relativas às rodas (normalmente estes valores são normalizados por isso não poderíamos manipular o seu valor) e quatro medidas de espessura das barras com as respetivas anilhas (estes valores já seriam flexíveis de maneira a conseguir-se que os tais 10% de comprimento em cada lado fossem preenchidos).

7.5 Condição 5

Admite-se que a velocidade linear máxima para esta máquina seja de 0,5 m/s, devido ao tipo de correntes de transmissão utilizadas para suporte e deslocamento das prateleiras não deverem trabalhar com velocidades superiores a esta.

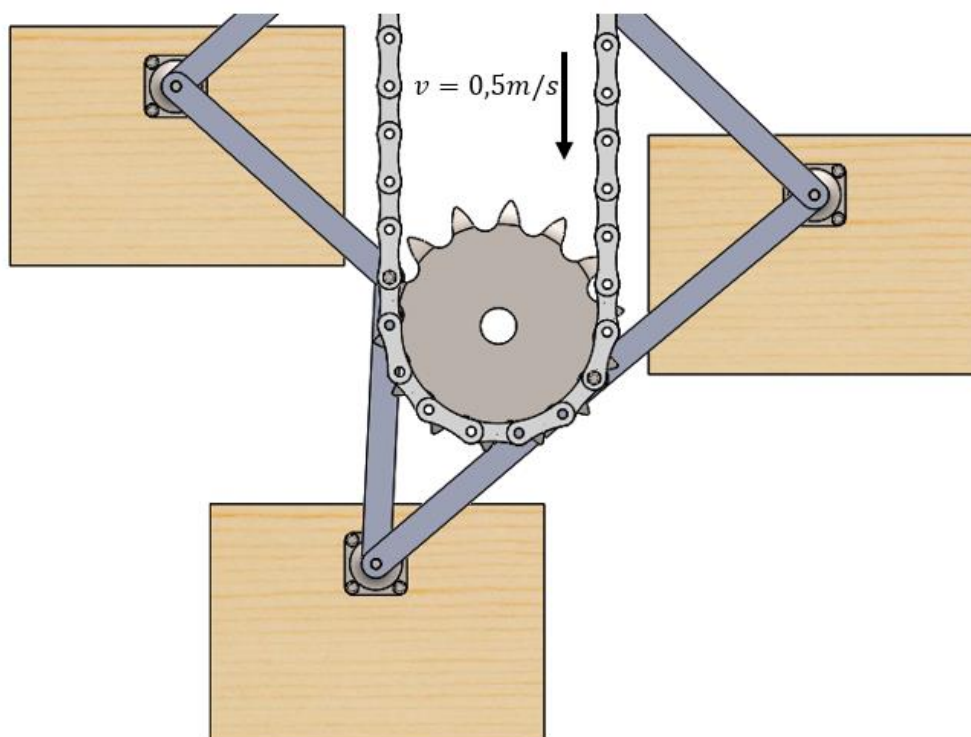


Figura 38 - velocidade linear máxima admissível

8 Tabelas de síntese

8.1 Atualização de todos os parâmetros de projeto

Com estas novas condições estabelecidas torna-se mais simples de encontrar soluções relativamente aos dados fornecidos pelo cliente ou os escolhidos nos catálogos. De notar que existem parâmetros que desaparecem pois deixam de ser úteis à nossa análise. Por último importa referir que, consideramos que, do lado esquerdo, se encontram os parâmetros com uma solução possível, e que por isso são os parâmetros que estabelecemos como “resolvidos”.

Parâmetros para os quais se obtém apenas um valor	Parâmetros para os quais se obtém um conjunto de valores
n (fornecida pelo cliente)	ω
a (fornecida pelo cliente)	D
b (fornecida pelo cliente)	T
c (fornecida pelo cliente)	
m_{carga} (fornecida pelo cliente)	
p (escolhido na tabela)	
z (escolhido na tabela)	
D_p	
R_p	
X	
e_{est}	
l	
β	
h	
f	
L	
m_{caixa}	
v	
R	

Tabela 3 - Segunda atualização das incógnitas com uma solução e várias soluções

9 Desacoplamento final do projeto

Observa-se na tabela do capítulo 8 que apenas nos falta conseguir definir soluções para os parâmetros ω (velocidade de rotação), D (diâmetro do veio) e T (momento de torção no veio), no entanto, isto deve-se também ao facto de algumas equações estabelecidas atrás deixarem de fazer sentido a partir do momento que se impõe as condições do capítulo 7.

A partir deste momento a velocidade de rotação a que a máquina irá trabalhar irá depender da velocidade linear assumida na condição 5, por isso é relativamente fácil de a obter. De notar que todas as variáveis são apresentadas no Sistema Internacional de unidades. Vem então:

$$\omega = \frac{v * 60}{\pi D_p} \quad (26)$$

Com a velocidade linear imposta na condição 5 e com a aplicação da condição 3, que é relativa à relação entre as massas da prateleira e da carga, podemos calcular de imediato a potência total que irá ser necessária transmitir à máquina para esta trabalhar nas condições pretendidas. Assim, começando primeiro por mostrar de novo a equação (25):

$$P_{TOT} = 1,15 \times \left(0 + \frac{1}{2} \times n \times m_{carga} \times g \times v + \frac{1}{4} (2 \times n \times m_{prateleira} + n \times m_{carga}) \times v^2 \right) \quad (25)$$

E aplicando as condições 4 e 5, vem:

$$P_{TOT} = 1,15 \times \left(\frac{1}{2} \times n \times m_{carga} \times g \times 0,5 + \frac{1}{4} (2 \times n \times \frac{m_{carga}}{5} + n \times m_{carga}) \times 0,5^2 \right) \Rightarrow$$

$$P_{TOT} = 1,15 \times \left(\frac{1}{4} \times n \times m_{carga} \times g + \frac{7}{80} (n \times m_{carga}) \right)$$

Como se pode verificar, esta equação passa a depender simplesmente de parâmetros que são fornecidos pelo cliente na fase inicial do projeto, o que torna possível a resolução desta expressão. Após obtido o valor da potência total, recorre-se aos catálogos de fornecedores para

escolher o motoredutor que deve ser instalado no sistema. Aquando da sua escolha, é necessário ter em consideração um fator de segurança para compensar todas as simplificações feitas ao longo de todo o processo de cálculo, da estimativa dos carregamentos e da incerteza nas propriedades dos materiais. Assim, no momento da sua escolha, deve-se sempre optar por um motor que tenha um valor de potência superior ao calculado.

Em termos de projeto, apenas nos falta dimensionar o diâmetro do veio. Para tal, precisamos de definir o valor do momento de torção que virá a existir caso existam condições para o veio estar sujeito a esse esforço. Assim, considera-se que esse valor de momento de torção (T) é três vezes superior ao binário nominal do motor B_N (esta proporção não é exata porque os motores podem ter mais ou menos proporção dependendo do fabricante, no entanto, estabelece-se este valor visto que, de uma forma geral, a proporção normalmente apresentada nos catálogos é esta). Assim, podemos dizer que:

$$B_N = \frac{P_{TOT}}{\omega} \quad (27)$$

Como nesta fase do projeto temos acesso tanto ao valor da potência total como ao da velocidade de rotação, é-nos fácil retirar o valor do binário nominal do motor. Após retirá-lo, apenas o temos de relacionar como o momento de torção. Como já explicado anteriormente, o momento de torção irá ser dado por:

$$T = 3B_N \quad (28)$$

Relembrando por fim as duas inequações estabelecidas para a torção:

$$\Rightarrow \frac{T}{D^3} < 12,7 \text{ MPa} \quad [7]$$

$$\Rightarrow \frac{T \times L}{D^4} < 136,6 \text{ MPa} \quad [8]$$

Procedendo-se à substituição do comprimento do veio (L) aplicando a condição 4 e do parâmetro do momento de torção pela expressão (28) acima deduzida, vem:

$$\begin{cases} \frac{3B_N}{D^3} < 12,7 \text{ MPa} \\ \frac{3B_N \times 1,2 \times a}{D^4} < 136,6 \text{ MPa} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D > \sqrt[3]{\frac{12,7}{3 \times B_N}} \\ D > \sqrt[4]{\frac{3B_N \times 1,2 \times a}{136,6}} \end{cases}$$

Com estas duas restrições finais resta-nos apenas escolher uma delas e garantir que o valor escolhido para o veio nunca seja menor que uma dessas expressões (são relativamente idênticas em termos de valores numéricos). Assim, garantindo isto, volta-se a relembrar a inequação [4]:

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + (h)^2} < \sqrt{Cx^2 + Cy^2}_{min} - \frac{D}{2} \quad [4]$$

Aplicando a condição 1 ($h = \frac{3}{4}c$) e resolvendo em ordem a D:

$$D < 2 \left(\sqrt{Cx^2 + Cy^2}_{min} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}c\right)^2} \right)$$

Com isto, conseguimos estabelecer um intervalo de valores possível para a escolha do diâmetro D. Simplesmente terá de respeitar a seguinte restrição:

$$\sqrt[3]{\frac{12,7}{3 \times B_N}} < D < 2 \left(\sqrt{Cx^2 + Cy^2}_{min} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}c\right)^2} \right)$$

Conclui-se assim a modelação para o apoio ao projeto deste tipo de máquinas. Considera-se que, no âmbito do presente trabalho, não é possível ir mais longe do que as equações já estabelecidas, e seria muito difícil projetar todos os pequenos constituintes do armazém devido à inexistência de valores numéricos.

10 Conclusões e trabalhos futuros

Terminado o anteprojeto desta máquina, e após serem impostas as condições necessárias, verifica-se que se torna possível, partindo das especificações definidas pelo cliente, obter as dimensões gerais da máquina através das expressões deduzidas neste trabalho, o que mostra que o principal objetivo desta dissertação foi cumprido. No entanto, conclui-se também que se torna muito difícil aprofundar mais os aspetos relativos aos dimensionamentos para além do que foi conseguido neste trabalho, isto porque, numa fase mais avançada, precisaríamos de dados numéricos para continuar este desenvolvimento. No entanto, foi muito positivo o que se conseguiu estabelecer principalmente ao nível geométrico. Por outro lado, todas as expressões que se conseguiram deduzir, mesmo com as condições mais tarde impostas, foram com o intuito de projetar um armazém rotativo sem guias, ou seja, juntamente com um tipo de mecanismo que ajudasse a contrabalançar as oscilações das partes móveis da máquina.

Conclui-se então que, no caso concreto analisado, a máquina irá sempre satisfazer as exigências do cliente relativamente à geometria das prateleiras. No entanto, e como neste documento apenas se analisa o caso da máquina em que apenas passa uma prateleira de cada vez pelas rodas dentadas, as mesmas não irão ter um diâmetro muito elevado, o que faz com que nessa zona as velocidades aumentem bastante comparativamente à zona retilínea que as prateleiras percorrem. Esta foi também uma das razões pela qual não se admite que a velocidade linear na corrente ultrapasse os 0,5 m/s. No entanto, a grande vantagem destas máquinas terem as rodas dentadas reduzidas é o facto de ocuparem menos espaço, e que hoje em dia é cada vez mais um requisito fundamental.

Numa dissertação deste tipo, torna-se impossível abordar todas as questões relacionadas com o tema em estudo, no entanto, neste separador são mostrados alguns temas para trabalhos futuros e que seria interessante analisar-se, fazendo com que este tema ficasse ainda mais completo.

Começando pelas barras, seria interessante desenvolver um trabalho onde se abordasse a sua geometria neste tipo de máquina, tanto a nível de espessura e forma como também a melhor configuração que elas deveriam de ter para suportar, da melhor forma, o peso das prateleiras.

Outro tema interessante seria o estudo da aplicação de dois pontos de apoio em cada lado das prateleiras, ao invés de apenas um. Embora já existam máquinas deste tipo com duplo apoio nas prateleiras, estas deixaram de ser fabricadas devido ao seu elevado custo de produção, uma vez que obriga à utilização de quatro correntes de suporte para elas. No entanto, se se aplicasse esta maneira diferente de as segurar, as oscilações tornar-se-iam inexistentes e assim, o armazém poderia rodar a uma velocidade muito superior à permitida no caso estudado neste documento.

Poderia também desenvolver-se um trabalho onde se abordasse a melhor configuração para as prateleiras de maneira a poder estudá-las relativamente a vários fatores tais como material usado na sua construção, forma, espaço para armazenamento ou preço.

Outro tema a analisar poderia ser também algo que passasse pelo estudo dos automatismos e da programação informática de todo este sistema. No entanto, este assunto estaria mais relacionado com outros ramos da engenharia, mais concretamente relativas à eletrotecnia e à automação.

Decerto que, para além destas questões já mencionadas, haverá um conjunto bastante abrangente de temas relacionados com este projeto e que poderiam abordar-se de maneira a complementar este trabalho.

Referências Bibliográficas

- [1] - SHIGLEY, J.R.; MISCHKE, C.R; BUDYNAS, R.G – Projeto de Engenharia Mecânica, Bookman, Porto Alegre, 2005, 7ª edição;
- [2] - RESNICK, R; HALLIDAY, D; MERRIL, J - *Fundamentos de Física*, volume 1 Mecânica, LTC (2006), 7ª edição;
- [3] - ALVES, C.C; TANIGUTI J - Mecânica - Projetos e Ensaio Mecânicos, volume 1, Fundação Padre Anchieta, São Paulo, 2011, ISBN 978-85-8028-039-5;
- [4] - FILHO, Flávio de Marco – Elementos de Transmissão Flexíveis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, 2009;
- [5] - BEER, F. P; JOHNSTON JR, E. R. – Resistência dos materiais, Pearson Makron Books, São Paulo, 1995, 3ª edição;
- [6] - PARK, Gyung-Jin – Analytic Methods for Design Practice, Springer, Londres, 2007; ISBN-13: 978-1-84628-472-4;
- [7] - Universidade Federal do Paraná, Elementos orgânicos de Máquinas II, disponível em <http://www.madeira.ufpr.br/disciplinasalan/AT102-Aula06.pdf>;
- [8] - Diário da República – 1ª Série, Nº 286 – 24 de Junho de 2008, Decreto-Lei n.º 103/2008;
- [9] - The SCRC Articles Library, The Benefits of Going Vertical, 2 de Junho de 2004, pode ser consultado em <http://scm.ncsu.edu/scm-articles/article/the-benefits-of-going-vertical>;
- [10] - Universidade Federal de São João Del-Rei, Aplicação da metodologia de projeto axiomático em sistemas de controle, 26 de Maio de 2010, disponível para consulta na hiperligação http://www.ufsj.edu.br/simmec2010/pagina/analise_numerica/PME-05.pdf;
- [11] - Modern Materials Handling, Storage/Staging; Vertical lift module saves space and strengthens ergonomics, 2 de Outubro de 2014, pode ser consultado na hiperligação http://www.mmh.com/article/storage_staging_vertical_lift_module_saves_space_and_strengthens_ergonomics;

- [12] - European Journal of Operational Research, 2009, Vol 193, pp425-436, Warehouse design: a structured approach, 2009, disponível em <https://dspace.lib.cranfield.ac.uk/bitstream/1826/3017/1/Warehouse%20Design-2009.pdf>;
- [13] - Edu-point, A modeling approach and support tool for designing automated warehouses, 2007, pode ser consultado em http://edu-point.eu/digitaledition/adveng/AE0101/AE0101_039-054.pdf;
- [14] - <http://pt.vrc.pt/uploads/imagens/produtos/office/office1.jpg>.

Anexos

Número de corrente ANSI	Passo, in (mm)	Largura, in (mm)	Resistência mínima de tração, lbf (N)	Largura média, lbf/ft (N/m)	Diâmetro de rolo, in (mm)	Espaçamento de fileiras múltiplas in (mm)
25	0,250 (6,35)	0,125 (3,18)	780 (3 470)	0,09 (1,31)	0,130 (3,30)	0,252 (6,40)
35	0,375 (9,52)	0,188 (4,76)	1 760 (7 830)	0,21 (3,06)	0,200 (5,08)	0,399 (10,13)
41	0,500 (12,70)	0,25 (6,35)	1 500 (6 670)	0,25 (3,65)	0,306 (7,77)	—
40	0,500 (12,70)	0,312 (7,94)	3 130 (13 920)	0,42 (6,13)	0,312 (7,92)	0,566 (14,38)
50	0,625 (15,88)	0,375 (9,52)	4 880 (21 700)	0,69 (10,1)	0,400 (10,16)	0,713 (18,11)
60	0,750 (19,05)	0,500 (12,7)	7 030 (31 300)	1,00 (14,6)	0,469 (11,91)	0,897 (22,78)
80	1,000 (25,40)	0,625 (15,88)	12 500 (55 600)	1,71 (25,0)	0,625 (15,87)	1,153 (29,29)
100	1,250 (31,75)	0,750 (19,05)	19 500 (86 700)	2,58 (37,7)	0,750 (19,05)	1,409 (35,76)
120	1,500 (38,10)	1,000 (25,40)	28 000 (124 500)	3,87 (56,5)	0,875 (22,22)	1,789 (45,44)
140	1,750 (44,45)	1,000 (25,40)	38 000 (169 000)	4,95 (72,2)	1,000 (25,40)	1,924 (48,87)
160	2,000 (50,80)	1,250 (31,75)	50 000 (222 000)	6,61 (96,5)	1,125 (28,57)	2,305 (58,55)
180	2,250 (57,15)	1,406 (35,71)	63 000 (280 000)	9,06 (132,2)	1,406 (35,71)	2,592 (65,84)
200	2,500 (63,50)	1,500 (38,10)	78 000 (347 000)	10,96 (159,9)	1,562 (39,67)	2,817 (71,55)
240	3,00 (76,70)	1,875 (47,63)	112 000 (498 000)	16,4 (239)	1,875 (47,62)	3,458 (87,83)

Fonte: Compilada da ANSI B29.1-1975.

A 1- Dimensões de correntes americanas padronizadas de rolos simples

Velocidade da roda dentada, rpm	Número de corrente ANSI														
	25	35	40	41	50	60	80	100	120	140	160	180	200	240	
50	0,05	0,16	0,37	0,20	0,72	1,24	2,88	5,52	9,33	14,4	20,9	28,9	38,4	61,8	
100	0,09	0,29	0,69	0,38	1,34	2,31	5,38	10,3	17,4	26,9	39,1	54,0	71,6	115	
150	0,13*	0,41*	0,99*	0,55*	1,92*	3,32	7,75	14,8	25,1	38,8	56,3	77,7	103	166	
200	0,16*	0,54*	1,29	0,71	2,50	4,30	10,0	19,2	32,5	50,3	72,9	101	134	215	
300	0,23	0,78	1,85	1,02	3,61	6,20	14,5	27,7	46,8	72,4	105	145	193	310	
400	0,30*	1,01*	2,40	1,32	4,67	8,03	18,7	35,9	60,6	93,8	136	188	249	359	
500	0,37	1,24	2,93	1,61	5,71	9,81	22,9	43,9	74,1	115	166	204	222	0	
600	0,44*	1,46*	3,45*	1,90*	6,72*	11,6	27,0	51,7	87,3	127	141	155	169		
700	0,50	1,68	3,97	2,18	7,73	13,3	31,0	59,4	89,0	101	112	123	0		
800	0,56*	1,89*	4,48*	2,46*	8,71*	15,0	35,0	63,0	72,8	82,4	91,7	101			
900	0,62	2,10	4,98	2,74	9,69	16,7	39,9	52,8	61,0	69,1	76,8	84,4			
1000	0,68*	2,31*	5,48	3,01	10,7	18,3	37,7	45,0	52,1	59,0	65,6	72,1			
1200	0,81	2,73	6,45	3,29	12,6	21,6	28,7	34,3	39,6	44,9	49,9	0			
1400	0,93*	3,13*	7,41	2,61	14,4	18,1	22,7	27,2	31,5	35,6	0				
1600	1,05*	3,53*	8,36	2,14	12,8	14,8	18,6	22,3	25,8	0					
1800	1,16	3,93	8,96	1,79	10,7	12,4	15,6	18,7	21,6						
2000	1,27*	4,32*	7,72*	1,52*	9,23*	10,6	13,3	15,9	0						
2500	1,56	5,28	5,51*	1,10*	6,58*	7,57	9,56	0,40							
3000	1,84	5,64	4,17	0,83	4,98	5,76	7,25	0							
Tipo A Tipo B Tipo C Tipo C'															

* Estimado a partir de tabelas da ANSI por interpolação linear.
Nota: Tipo A – lubrificação manual ou gotejamento; Tipo B – lubrificação de disco ou banho; Tipo C – lubrificação de corrente de óleo; Tipo C' – tipo C, mas essa é uma região difícil; submeta o projeto ao fabricante, para avaliação.
Fonte: Compilada da ANSI B29.1-1975, seção de informação apenas, e da B29.9-1958.

A 2 - Capacidade estimada de potência da corrente de rolos simples - passo único para a roda dentada de 17 dentes

Nº	Total de dentes disponíveis de roda dentada
25	8-30, 32, 34, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 54, 60, 64, 65, 70, 72, 76, 80, 84, 90, 95, 96, 102, 112, 120
35	4-45, 48, 52, 54, 60, 64, 65, 68, 70, 72, 76, 80, 84, 90, 95, 96, 102, 112, 120
41	6-60, 64, 65, 68, 70, 72, 76, 80, 84, 90, 95, 96, 102, 112, 120
40	8-60, 64, 65, 68, 70, 72, 76, 80, 84, 90, 95, 96, 102, 112, 120
50	8-60, 64, 65, 68, 70, 72, 76, 80, 84, 90, 95, 96, 102, 112, 120
60	8-60, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 70, 72, 76, 80, 84, 90, 95, 96, 102, 112, 120
80	8-60, 64, 65, 68, 70, 72, 76, 78, 80, 84, 90, 95, 96, 102, 112, 120
100	8-60, 64, 65, 67, 68, 70, 72, 74, 76, 80, 84, 90, 95, 96, 102, 112, 120
120	9-45, 46, 48, 50, 52, 54, 55, 57, 60, 64, 65, 67, 68, 70, 72, 76, 80, 84, 90, 96, 102, 112, 120
140	9-28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 42, 43, 45, 48, 54, 60, 64, 65, 68, 70, 72, 76, 80, 84, 96
160	8-30, 32-36, 38, 40, 45, 46, 50, 52, 53, 54, 56, 57, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 68, 70, 72, 73, 80, 84, 96
180	13-25, 28, 35, 39, 40, 45, 54, 60
200	9-30, 32, 33, 35, 36, 39, 40, 42, 44, 45, 48, 50, 51, 54, 56, 58, 59, 60, 63, 64, 65, 68, 70, 72
240	9-30, 32, 35, 36, 40, 44, 45, 48, 52, 54, 60

* Morse Chain Company, Ithaca, NY, cubo tipo B de roda dentada.

A 3 - Total disponíveis de roda dentada de fileira única de um fornecedor

$$\begin{aligned}
Cx = & -\frac{1}{2} \frac{1}{\pi^2 + 2\pi \sin(\alpha) - 2\pi \alpha - 2\alpha \sin(\alpha) + \alpha^2 - 2\cos(\alpha) + 2} \left(\pi^2 Rp \cos(\alpha) - 2\pi Rp \alpha \cos(\alpha) + \cos(\alpha) Rp \alpha^2 + \pi^2 Rp - 2\pi Rp \alpha \right. \\
& - \frac{1}{\pi^2 + 2\pi \sin(\alpha) - 2\pi \alpha - 2\alpha \sin(\alpha) + \alpha^2 - 2\cos(\alpha) + 2} \left(\pi \cos(\alpha) \left(\pi^3 Rp + \pi^2 Rp \sin(\alpha) - 3\pi^2 Rp \alpha + 2\pi \cos(\alpha)^2 Rp - 2\pi Rp \alpha \sin(\alpha) \right. \right. \\
& + 3\pi Rp \alpha^2 - 2\cos(\alpha)^2 Rp \alpha + Rp \alpha^2 \sin(\alpha) - Rp \alpha^3 - 2\pi \cos(\alpha) Rp + 2\cos(\alpha) Rp \sin(\alpha) + 2\cos(\alpha) Rp \alpha - 2Rp \sin(\alpha) \\
& - \left(-8Rp^2 - 24\cos(\alpha)^2 Rp^2 + 4\sin(\alpha)^2 Rp^2 - 4\pi^2 Rp^2 - 4Rp^2 \alpha^2 + 8\pi Rp^2 \alpha + 24\cos(\alpha)^2 l^2 + 24\cos(\alpha) Rp^2 - 24\cos(\alpha) l^2 \right. \\
& + 32\pi \cos(\alpha)^2 Rp^2 \alpha + 8\pi Rp^2 \alpha \sin(\alpha)^2 - 32\pi \cos(\alpha) Rp^2 \alpha - 16\pi^2 \cos(\alpha)^2 Rp^2 - 16\cos(\alpha)^2 Rp^2 \alpha^2 - 4\pi^2 Rp^2 \sin(\alpha)^2 - 4Rp^2 \alpha^2 \sin(\alpha)^2 \\
& + 16\pi^2 \cos(\alpha) Rp^2 + 16\cos(\alpha) Rp^2 \alpha^2 + 4\alpha^2 l^2 + 8\cos(\alpha)^3 Rp^2 - 8\cos(\alpha)^3 l^2 + 4\pi^2 l^2 + 4\pi^2 \cos(\alpha)^2 l^2 + 4\cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)^2 Rp^2 + 4\cos(\alpha)^2 \alpha^2 l^2 \\
& + 4\sin(\alpha) Rp^2 \alpha^3 - 8\pi^2 \cos(\alpha) l^2 - 8\cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 Rp^2 - 8\cos(\alpha) \alpha^2 l^2 - 8\pi \sin(\alpha) Rp^2 + 8\pi \sin(\alpha) l^2 - 8\pi \alpha l^2 + 8\sin(\alpha) Rp^2 \alpha \\
& - 8\sin(\alpha) \alpha l^2 + \pi^4 \sin(\alpha)^2 Rp^2 + 4\pi^2 \cos(\alpha)^4 Rp^2 + 4\cos(\alpha)^4 Rp^2 \alpha^2 + \sin(\alpha)^2 Rp^2 \alpha^4 + 2\pi^4 \cos(\alpha) Rp^2 + 2\cos(\alpha) Rp^2 \alpha^4 - 4\pi^3 \sin(\alpha) Rp^2 \\
& - 2Rp^2 \alpha^4 - 2\pi^4 Rp^2 + 8\pi^3 Rp^2 \alpha - 12\pi^2 Rp^2 \alpha^2 + 8\pi Rp^2 \alpha^3 + 12\pi^2 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) Rp^2 \alpha - 12\pi \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) Rp^2 \alpha^2 \\
& - 24\pi^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) Rp^2 \alpha - 8\pi \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 Rp^2 \alpha + 24\pi \cos(\alpha) \sin(\alpha) Rp^2 \alpha^2 + 8l^2 + 16\cos(\alpha) \sin(\alpha) \alpha l^2 - 4\pi^3 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) Rp^2 \\
& - 4\pi^3 \sin(\alpha)^2 Rp^2 \alpha + 6\pi^2 \sin(\alpha)^2 Rp^2 \alpha^2 - 8\pi \cos(\alpha)^4 Rp^2 \alpha - 4\pi \sin(\alpha)^2 Rp^2 \alpha^3 + 4\cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) Rp^2 \alpha^3 + 8\pi^3 \cos(\alpha) \sin(\alpha) Rp^2 \\
& - 8\pi^3 \cos(\alpha) Rp^2 \alpha + 4\pi^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 Rp^2 + 12\pi^2 \cos(\alpha) Rp^2 \alpha^2 + 8\pi \cos(\alpha)^3 \sin(\alpha) Rp^2 - 8\pi \cos(\alpha) Rp^2 \alpha^3 - 8\cos(\alpha)^3 \sin(\alpha) Rp^2 \alpha \\
& + 4\cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 Rp^2 \alpha^2 - 8\cos(\alpha) \sin(\alpha) Rp^2 \alpha^3 + 12\pi^2 \sin(\alpha) Rp^2 \alpha - 24\pi \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) Rp^2 + 8\pi \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) l^2 - 8\pi \cos(\alpha)^2 \alpha l^2 \\
& - 12\pi \sin(\alpha) Rp^2 \alpha^2 + 24\cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) Rp^2 \alpha - 8\cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) \alpha l^2 + 24\pi \cos(\alpha) \sin(\alpha) Rp^2 - 16\pi \cos(\alpha) \sin(\alpha) l^2 + 16\pi \cos(\alpha) \alpha l^2 \\
& \left. - 24\cos(\alpha) \sin(\alpha) Rp^2 \alpha \right)^{1/2} \Big) + Rp \alpha^2 + \frac{1}{\pi^2 + 2\pi \sin(\alpha) - 2\pi \alpha - 2\alpha \sin(\alpha) + \alpha^2 - 2\cos(\alpha) + 2} \left(\alpha \cos(\alpha) \left(\pi^3 Rp + \pi^2 Rp \sin(\alpha) \right. \right. \\
& - 3\pi^2 Rp \alpha + 2\pi \cos(\alpha)^2 Rp - 2\pi Rp \alpha \sin(\alpha) + 3\pi Rp \alpha^2 - 2\cos(\alpha)^2 Rp \alpha + Rp \alpha^2 \sin(\alpha) - Rp \alpha^3 - 2\pi \cos(\alpha) Rp + 2\cos(\alpha) Rp \sin(\alpha) \\
& + 2\cos(\alpha) Rp \alpha - 2Rp \sin(\alpha) \\
& - \left(-8Rp^2 - 24\cos(\alpha)^2 Rp^2 + 4\sin(\alpha)^2 Rp^2 - 4\pi^2 Rp^2 - 4Rp^2 \alpha^2 + 8\pi Rp^2 \alpha + 24\cos(\alpha)^2 l^2 + 24\cos(\alpha) Rp^2 - 24\cos(\alpha) l^2 \right. \\
& + 32\pi \cos(\alpha)^2 Rp^2 \alpha + 8\pi Rp^2 \alpha \sin(\alpha)^2 - 32\pi \cos(\alpha) Rp^2 \alpha - 16\pi^2 \cos(\alpha)^2 Rp^2 - 16\cos(\alpha)^2 Rp^2 \alpha^2 - 4\pi^2 Rp^2 \sin(\alpha)^2 - 4Rp^2 \alpha^2 \sin(\alpha)^2 \\
& + 16\pi^2 \cos(\alpha) Rp^2 + 16\cos(\alpha) Rp^2 \alpha^2 + 4\alpha^2 l^2 + 8\cos(\alpha)^3 Rp^2 - 8\cos(\alpha)^3 l^2 + 4\pi^2 l^2 + 4\pi^2 \cos(\alpha)^2 l^2 + 4\cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)^2 Rp^2 + 4\cos(\alpha)^2 \alpha^2 l^2 \\
& + 4\sin(\alpha) Rp^2 \alpha^3 - 8\pi^2 \cos(\alpha) l^2 - 8\cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 Rp^2 - 8\cos(\alpha) \alpha^2 l^2 - 8\pi \sin(\alpha) Rp^2 + 8\pi \sin(\alpha) l^2 - 8\pi \alpha l^2 + 8\sin(\alpha) Rp^2 \alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -8 \sin(\alpha) \alpha \ell^2 + \pi^4 \sin(\alpha)^2 R p^2 + 4 \pi^2 \cos(\alpha)^4 R p^2 + 4 \cos(\alpha)^4 R p^2 \alpha^2 + \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha^4 + 2 \pi^4 \cos(\alpha) R p^2 + 2 \cos(\alpha) R p^2 \alpha^4 - 4 \pi^3 \sin(\alpha) R p^2 \\
& - 2 R p^2 \alpha^4 - 2 \pi^4 R p^2 + 8 \pi^3 R p^2 \alpha - 12 \pi^2 R p^2 \alpha^2 + 8 \pi R p^2 \alpha^3 + 12 \pi^2 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha - 12 \pi \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha^2 \\
& - 24 \pi^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \alpha - 8 \pi \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha + 24 \pi \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \alpha^2 + 8 \ell^2 + 16 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \alpha \ell^2 - 4 \pi^3 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \\
& - 4 \pi^3 \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha + 6 \pi^2 \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha^2 - 8 \pi \cos(\alpha)^4 R p^2 \alpha - 4 \pi \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha^3 + 4 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha^3 + 8 \pi^3 \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \\
& - 8 \pi^3 \cos(\alpha) R p^2 \alpha + 4 \pi^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 R p^2 + 12 \pi^2 \cos(\alpha) R p^2 \alpha^2 + 8 \pi \cos(\alpha)^3 \sin(\alpha) R p^2 - 8 \pi \cos(\alpha) R p^2 \alpha^3 - 8 \cos(\alpha)^3 \sin(\alpha) R p^2 \alpha \\
& + 4 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha^2 - 8 \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \alpha^3 + 12 \pi^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha - 24 \pi \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 + 8 \pi \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) \ell^2 - 8 \pi \cos(\alpha)^2 \alpha \ell^2 \\
& - 12 \pi \sin(\alpha) R p^2 \alpha^2 + 24 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha - 8 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) \alpha \ell^2 + 24 \pi \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 - 16 \pi \cos(\alpha) \sin(\alpha) \ell^2 + 16 \pi \cos(\alpha) \alpha \ell^2 \\
& - 24 \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \alpha^{1/2} \Big) - \frac{1}{\pi^2 + 2 \pi \sin(\alpha) - 2 \pi \alpha - 2 \alpha \sin(\alpha) + \alpha^2 - 2 \cos(\alpha) + 2} \Big(\sin(\alpha) \cos(\alpha) \Big(\pi^3 R p + \pi^2 R p \sin(\alpha) \\
& - 3 \pi^2 R p \alpha + 2 \pi \cos(\alpha)^2 R p - 2 \pi R p \alpha \sin(\alpha) + 3 \pi R p \alpha^2 - 2 \cos(\alpha)^2 R p \alpha + R p \alpha^2 \sin(\alpha) - R p \alpha^3 - 2 \pi \cos(\alpha) R p + 2 \cos(\alpha) R p \sin(\alpha) \\
& + 2 \cos(\alpha) R p \alpha - 2 R p \sin(\alpha) \Big) \\
& - \Big(-8 R p^2 - 24 \cos(\alpha)^2 R p^2 + 4 \sin(\alpha)^2 R p^2 - 4 \pi^2 R p^2 - 4 R p^2 \alpha^2 + 8 \pi R p^2 \alpha + 24 \cos(\alpha)^2 \ell^2 + 24 \cos(\alpha) R p^2 - 24 \cos(\alpha) \ell^2 \\
& + 32 \pi \cos(\alpha)^2 R p^2 \alpha + 8 \pi R p^2 \alpha \sin(\alpha)^2 - 32 \pi \cos(\alpha) R p^2 \alpha - 16 \pi^2 \cos(\alpha)^2 R p^2 - 16 \cos(\alpha)^2 R p^2 \alpha^2 - 4 \pi^2 R p^2 \sin(\alpha)^2 - 4 R p^2 \alpha^2 \sin(\alpha)^2 \\
& + 16 \pi^2 \cos(\alpha) R p^2 + 16 \cos(\alpha) R p^2 \alpha^2 + 4 \alpha^2 \ell^2 + 8 \cos(\alpha)^3 R p^2 - 8 \cos(\alpha)^3 \ell^2 + 4 \pi^2 \ell^2 + 4 \pi^2 \cos(\alpha)^2 \ell^2 + 4 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)^2 R p^2 + 4 \cos(\alpha)^2 \alpha^2 \ell^2 \\
& + 4 \sin(\alpha) R p^2 \alpha^3 - 8 \pi^2 \cos(\alpha) \ell^2 - 8 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 R p^2 - 8 \cos(\alpha) \alpha^2 \ell^2 - 8 \pi \sin(\alpha) R p^2 + 8 \pi \sin(\alpha) \ell^2 - 8 \pi \alpha \ell^2 + 8 \sin(\alpha) R p^2 \alpha \\
& - 8 \sin(\alpha) \alpha \ell^2 + \pi^4 \sin(\alpha)^2 R p^2 + 4 \pi^2 \cos(\alpha)^4 R p^2 + 4 \cos(\alpha)^4 R p^2 \alpha^2 + \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha^4 + 2 \pi^4 \cos(\alpha) R p^2 + 2 \cos(\alpha) R p^2 \alpha^4 - 4 \pi^3 \sin(\alpha) R p^2 \\
& - 2 R p^2 \alpha^4 - 2 \pi^4 R p^2 + 8 \pi^3 R p^2 \alpha - 12 \pi^2 R p^2 \alpha^2 + 8 \pi R p^2 \alpha^3 + 12 \pi^2 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha - 12 \pi \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha^2 \\
& - 24 \pi^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \alpha - 8 \pi \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha + 24 \pi \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \alpha^2 + 8 \ell^2 + 16 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \alpha \ell^2 - 4 \pi^3 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \\
& - 4 \pi^3 \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha + 6 \pi^2 \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha^2 - 8 \pi \cos(\alpha)^4 R p^2 \alpha - 4 \pi \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha^3 + 4 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha^3 + 8 \pi^3 \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \\
& - 8 \pi^3 \cos(\alpha) R p^2 \alpha + 4 \pi^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 R p^2 + 12 \pi^2 \cos(\alpha) R p^2 \alpha^2 + 8 \pi \cos(\alpha)^3 \sin(\alpha) R p^2 - 8 \pi \cos(\alpha) R p^2 \alpha^3 - 8 \cos(\alpha)^3 \sin(\alpha) R p^2 \alpha \\
& + 4 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha^2 - 8 \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \alpha^3 + 12 \pi^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha - 24 \pi \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 + 8 \pi \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) \ell^2 - 8 \pi \cos(\alpha)^2 \alpha \ell^2 \\
& - 12 \pi \sin(\alpha) R p^2 \alpha^2 + 24 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha - 8 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) \alpha \ell^2 + 24 \pi \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 - 16 \pi \cos(\alpha) \sin(\alpha) \ell^2 + 16 \pi \cos(\alpha) \alpha \ell^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -24 \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \alpha^{1/2} \Big) - \frac{1}{\pi^2 + 2 \pi \sin(\alpha) - 2 \pi \alpha - 2 \alpha \sin(\alpha) + \alpha^2 - 2 \cos(\alpha) + 2} \Big(\Big(\pi^3 R p + \pi^2 R p \sin(\alpha) - 3 \pi^2 R p \alpha \\
& + 2 \pi \cos(\alpha)^2 R p - 2 \pi R p \alpha \sin(\alpha) + 3 \pi R p \alpha^2 - 2 \cos(\alpha)^2 R p \alpha + R p \alpha^2 \sin(\alpha) - R p \alpha^3 - 2 \pi \cos(\alpha) R p + 2 \cos(\alpha) R p \sin(\alpha) + 2 \cos(\alpha) R p \alpha \\
& - 2 R p \sin(\alpha) \\
& - \Big(-8 R p^2 - 24 \cos(\alpha)^2 R p^2 + 4 \sin(\alpha)^2 R p^2 - 4 \pi^2 R p^2 - 4 R p^2 \alpha^2 + 8 \pi R p^2 \alpha + 24 \cos(\alpha)^2 I^2 + 24 \cos(\alpha) R p^2 - 24 \cos(\alpha) I^2 \\
& + 32 \pi \cos(\alpha)^2 R p^2 \alpha + 8 \pi R p^2 \alpha \sin(\alpha)^2 - 32 \pi \cos(\alpha) R p^2 \alpha - 16 \pi^2 \cos(\alpha)^2 R p^2 - 16 \cos(\alpha)^2 R p^2 \alpha^2 - 4 \pi^2 R p^2 \sin(\alpha)^2 - 4 R p^2 \alpha^2 \sin(\alpha)^2 \\
& + 16 \pi^2 \cos(\alpha) R p^2 + 16 \cos(\alpha) R p^2 \alpha^2 + 4 \alpha^2 I^2 + 8 \cos(\alpha)^3 R p^2 - 8 \cos(\alpha)^3 I^2 + 4 \pi^2 I^2 + 4 \pi^2 \cos(\alpha)^2 I^2 + 4 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)^2 R p^2 + 4 \cos(\alpha)^2 \alpha^2 I^2 \\
& + 4 \sin(\alpha) R p^2 \alpha^3 - 8 \pi^2 \cos(\alpha) I^2 - 8 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 R p^2 - 8 \cos(\alpha) \alpha^2 I^2 - 8 \pi \sin(\alpha) R p^2 + 8 \pi \sin(\alpha) I^2 - 8 \pi \alpha I^2 + 8 \sin(\alpha) R p^2 \alpha \\
& - 8 \sin(\alpha) \alpha I^2 + \pi^4 \sin(\alpha)^2 R p^2 + 4 \pi^2 \cos(\alpha)^4 R p^2 + 4 \cos(\alpha)^4 R p^2 \alpha^2 + \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha^4 + 2 \pi^4 \cos(\alpha) R p^2 + 2 \cos(\alpha) R p^2 \alpha^4 - 4 \pi^3 \sin(\alpha) R p^2 \\
& - 2 R p^2 \alpha^4 - 2 \pi^4 R p^2 + 8 \pi^3 R p^2 \alpha - 12 \pi^2 R p^2 \alpha^2 + 8 \pi R p^2 \alpha^3 + 12 \pi^2 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha - 12 \pi \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha^2 \\
& - 24 \pi^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \alpha - 8 \pi \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha + 24 \pi \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \alpha^2 + 8 I^2 + 16 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \alpha I^2 - 4 \pi^3 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \\
& - 4 \pi^3 \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha + 6 \pi^2 \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha^2 - 8 \pi \cos(\alpha)^4 R p^2 \alpha - 4 \pi \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha^3 + 4 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha^3 + 8 \pi^3 \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \\
& - 8 \pi^3 \cos(\alpha) R p^2 \alpha + 4 \pi^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 R p^2 + 12 \pi^2 \cos(\alpha) R p^2 \alpha^2 + 8 \pi \cos(\alpha)^3 \sin(\alpha) R p^2 - 8 \pi \cos(\alpha) R p^2 \alpha^3 - 8 \cos(\alpha)^3 \sin(\alpha) R p^2 \alpha \\
& + 4 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha^2 - 8 \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \alpha^3 + 12 \pi^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha - 24 \pi \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 + 8 \pi \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) I^2 - 8 \pi \cos(\alpha)^2 \alpha I^2 \\
& - 12 \pi \sin(\alpha) R p^2 \alpha^2 + 24 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha - 8 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) \alpha I^2 + 24 \pi \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 - 16 \pi \cos(\alpha) \sin(\alpha) I^2 + 16 \pi \cos(\alpha) \alpha I^2 \\
& - 24 \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \alpha^{1/2} \Big) \Big) + \frac{1}{\pi^2 + 2 \pi \sin(\alpha) - 2 \pi \alpha - 2 \alpha \sin(\alpha) + \alpha^2 - 2 \cos(\alpha) + 2} \Big(\Big(\pi^3 R p + \pi^2 R p \sin(\alpha) - 3 \pi^2 R p \alpha \\
& + 2 \pi \cos(\alpha)^2 R p - 2 \pi R p \alpha \sin(\alpha) + 3 \pi R p \alpha^2 - 2 \cos(\alpha)^2 R p \alpha + R p \alpha^2 \sin(\alpha) - R p \alpha^3 - 2 \pi \cos(\alpha) R p + 2 \cos(\alpha) R p \sin(\alpha) + 2 \cos(\alpha) R p \alpha \\
& - 2 R p \sin(\alpha) \\
& - \Big(-8 R p^2 - 24 \cos(\alpha)^2 R p^2 + 4 \sin(\alpha)^2 R p^2 - 4 \pi^2 R p^2 - 4 R p^2 \alpha^2 + 8 \pi R p^2 \alpha + 24 \cos(\alpha)^2 I^2 + 24 \cos(\alpha) R p^2 - 24 \cos(\alpha) I^2 \\
& + 32 \pi \cos(\alpha)^2 R p^2 \alpha + 8 \pi R p^2 \alpha \sin(\alpha)^2 - 32 \pi \cos(\alpha) R p^2 \alpha - 16 \pi^2 \cos(\alpha)^2 R p^2 - 16 \cos(\alpha)^2 R p^2 \alpha^2 - 4 \pi^2 R p^2 \sin(\alpha)^2 - 4 R p^2 \alpha^2 \sin(\alpha)^2 \\
& + 16 \pi^2 \cos(\alpha) R p^2 + 16 \cos(\alpha) R p^2 \alpha^2 + 4 \alpha^2 I^2 + 8 \cos(\alpha)^3 R p^2 - 8 \cos(\alpha)^3 I^2 + 4 \pi^2 I^2 + 4 \pi^2 \cos(\alpha)^2 I^2 + 4 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)^2 R p^2 + 4 \cos(\alpha)^2 \alpha^2 I^2 \\
& + 4 \sin(\alpha) R p^2 \alpha^3 - 8 \pi^2 \cos(\alpha) I^2 - 8 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 R p^2 - 8 \cos(\alpha) \alpha^2 I^2 - 8 \pi \sin(\alpha) R p^2 + 8 \pi \sin(\alpha) I^2 - 8 \pi \alpha I^2 + 8 \sin(\alpha) R p^2 \alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -8 \sin(\alpha) \alpha I^2 + \pi^4 \sin(\alpha)^2 R p^2 + 4 \pi^2 \cos(\alpha)^4 R p^2 + 4 \cos(\alpha)^4 R p^2 \alpha^2 + \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha^4 + 2 \pi^4 \cos(\alpha) R p^2 + 2 \cos(\alpha) R p^2 \alpha^4 - 4 \pi^3 \sin(\alpha) R p^2 \\
& - 2 R p^2 \alpha^4 - 2 \pi^4 R p^2 + 8 \pi^3 R p^2 \alpha - 12 \pi^2 R p^2 \alpha^2 + 8 \pi R p^2 \alpha^3 + 12 \pi^2 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha - 12 \pi \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha^2 \\
& - 24 \pi^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \alpha - 8 \pi \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha + 24 \pi \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \alpha^2 + 8 I^2 + 16 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \alpha I^2 - 4 \pi^3 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \\
& - 4 \pi^3 \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha + 6 \pi^2 \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha^2 - 8 \pi \cos(\alpha)^4 R p^2 \alpha - 4 \pi \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha^3 + 4 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha^3 + 8 \pi^3 \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \\
& - 8 \pi^3 \cos(\alpha) R p^2 \alpha + 4 \pi^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 R p^2 + 12 \pi^2 \cos(\alpha) R p^2 \alpha^2 + 8 \pi \cos(\alpha)^3 \sin(\alpha) R p^2 - 8 \pi \cos(\alpha) R p^2 \alpha^3 - 8 \cos(\alpha)^3 \sin(\alpha) R p^2 \alpha \\
& + 4 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha^2 - 8 \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \alpha^3 + 12 \pi^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha - 24 \pi \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 + 8 \pi \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) I^2 - 8 \pi \cos(\alpha)^2 \alpha I^2 \\
& - 12 \pi \sin(\alpha) R p^2 \alpha^2 + 24 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha - 8 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) \alpha I^2 + 24 \pi \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 - 16 \pi \cos(\alpha) \sin(\alpha) I^2 + 16 \pi \cos(\alpha) \alpha I^2 \\
& - 24 \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \alpha^{1/2} \Big) \alpha \Big) - \frac{1}{\pi^2 + 2 \pi \sin(\alpha) - 2 \pi \alpha - 2 \alpha \sin(\alpha) + \alpha^2 - 2 \cos(\alpha) + 2} \Big(\Big(\pi^3 R p + \pi^2 R p \sin(\alpha) - 3 \pi^2 R p \alpha \\
& + 2 \pi \cos(\alpha)^2 R p - 2 \pi R p \alpha \sin(\alpha) + 3 \pi R p \alpha^2 - 2 \cos(\alpha)^2 R p \alpha + R p \alpha^2 \sin(\alpha) - R p \alpha^3 - 2 \pi \cos(\alpha) R p + 2 \cos(\alpha) R p \sin(\alpha) + 2 \cos(\alpha) R p \alpha \\
& - 2 R p \sin(\alpha) \\
& - \Big(-8 R p^2 - 24 \cos(\alpha)^2 R p^2 + 4 \sin(\alpha)^2 R p^2 - 4 \pi^2 R p^2 - 4 R p^2 \alpha^2 + 8 \pi R p^2 \alpha + 24 \cos(\alpha)^2 I^2 + 24 \cos(\alpha) R p^2 - 24 \cos(\alpha) I^2 \\
& + 32 \pi \cos(\alpha)^2 R p^2 \alpha + 8 \pi R p^2 \alpha \sin(\alpha)^2 - 32 \pi \cos(\alpha) R p^2 \alpha - 16 \pi^2 \cos(\alpha)^2 R p^2 - 16 \cos(\alpha)^2 R p^2 \alpha^2 - 4 \pi^2 R p^2 \sin(\alpha)^2 - 4 R p^2 \alpha^2 \sin(\alpha)^2 \\
& + 16 \pi^2 \cos(\alpha) R p^2 + 16 \cos(\alpha) R p^2 \alpha^2 + 4 \alpha^2 I^2 + 8 \cos(\alpha)^3 R p^2 - 8 \cos(\alpha)^3 I^2 + 4 \pi^2 I^2 + 4 \pi^2 \cos(\alpha)^2 I^2 + 4 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)^2 R p^2 + 4 \cos(\alpha)^2 \alpha^2 I^2 \\
& + 4 \sin(\alpha) R p^2 \alpha^3 - 8 \pi^2 \cos(\alpha) I^2 - 8 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 R p^2 - 8 \cos(\alpha) \alpha^2 I^2 - 8 \pi \sin(\alpha) R p^2 + 8 \pi \sin(\alpha) I^2 - 8 \pi \alpha I^2 + 8 \sin(\alpha) R p^2 \alpha \\
& - 8 \sin(\alpha) \alpha I^2 + \pi^4 \sin(\alpha)^2 R p^2 + 4 \pi^2 \cos(\alpha)^4 R p^2 + 4 \cos(\alpha)^4 R p^2 \alpha^2 + \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha^4 + 2 \pi^4 \cos(\alpha) R p^2 + 2 \cos(\alpha) R p^2 \alpha^4 - 4 \pi^3 \sin(\alpha) R p^2 \\
& - 2 R p^2 \alpha^4 - 2 \pi^4 R p^2 + 8 \pi^3 R p^2 \alpha - 12 \pi^2 R p^2 \alpha^2 + 8 \pi R p^2 \alpha^3 + 12 \pi^2 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha - 12 \pi \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha^2 \\
& - 24 \pi^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \alpha - 8 \pi \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha + 24 \pi \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \alpha^2 + 8 I^2 + 16 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \alpha I^2 - 4 \pi^3 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \\
& - 4 \pi^3 \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha + 6 \pi^2 \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha^2 - 8 \pi \cos(\alpha)^4 R p^2 \alpha - 4 \pi \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha^3 + 4 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha^3 + 8 \pi^3 \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \\
& - 8 \pi^3 \cos(\alpha) R p^2 \alpha + 4 \pi^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 R p^2 + 12 \pi^2 \cos(\alpha) R p^2 \alpha^2 + 8 \pi \cos(\alpha)^3 \sin(\alpha) R p^2 - 8 \pi \cos(\alpha) R p^2 \alpha^3 - 8 \cos(\alpha)^3 \sin(\alpha) R p^2 \alpha \\
& + 4 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha^2 - 8 \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \alpha^3 + 12 \pi^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha - 24 \pi \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 + 8 \pi \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) I^2 - 8 \pi \cos(\alpha)^2 \alpha I^2 \\
& - 12 \pi \sin(\alpha) R p^2 \alpha^2 + 24 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha - 8 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) \alpha I^2 + 24 \pi \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 - 16 \pi \cos(\alpha) \sin(\alpha) I^2 + 16 \pi \cos(\alpha) \alpha I^2 \\
& - 24 \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \alpha^{1/2} \Big) \sin(\alpha) \Big) \Big)
\end{aligned}$$

A4 – Expressão analítica de Cx

$$\begin{aligned}
C_y = & -\frac{1}{2} \frac{1}{\pi^2 + 2\pi \sin(\alpha) - 2\pi\alpha - 2\alpha \sin(\alpha) + \alpha^2 - 2\cos(\alpha) + 2} \left(\pi^3 R p + \pi^2 R p \sin(\alpha) - 3\pi^2 R p \alpha + 2\pi \cos(\alpha)^2 R p - 2\pi R p \alpha \sin(\alpha) + 3\pi R p \alpha \right. \\
& - 2\cos(\alpha)^2 R p \alpha + R p \alpha^2 \sin(\alpha) - R p \alpha^3 - 2\pi \cos(\alpha) R p + 2\cos(\alpha) R p \sin(\alpha) + 2\cos(\alpha) R p \alpha - 2R p \sin(\alpha) \\
& - (-8 R p^2 - 24\cos(\alpha)^2 R p^2 + 4\sin(\alpha)^2 R p^2 - 4\pi^2 R p^2 - 4 R p^2 \alpha^2 + 8\pi R p^2 \alpha + 24\cos(\alpha)^2 I^2 + 24\cos(\alpha) R p^2 - 24\cos(\alpha) I^2 \\
& + 32\pi \cos(\alpha)^2 R p^2 \alpha + 8\pi R p^2 \alpha \sin(\alpha)^2 - 32\pi \cos(\alpha) R p^2 \alpha - 16\pi^2 \cos(\alpha)^2 R p^2 - 16\cos(\alpha)^2 R p^2 \alpha^2 - 4\pi^2 R p^2 \sin(\alpha)^2 - 4 R p^2 \alpha^2 \sin(\alpha)^2 \\
& + 16\pi^2 \cos(\alpha) R p^2 + 16\cos(\alpha) R p^2 \alpha^2 + 4\alpha^2 I^2 + 8\cos(\alpha)^3 R p^2 - 8\cos(\alpha)^3 I^2 + 4\pi^2 I^2 + 4\pi^2 \cos(\alpha)^2 I^2 + 4\cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)^2 R p^2 + 4\cos(\alpha)^2 \alpha^2 I^2 \\
& + 4\sin(\alpha) R p^2 \alpha^3 - 8\pi^2 \cos(\alpha) I^2 - 8\cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 R p^2 - 8\cos(\alpha) \alpha^2 I^2 - 8\pi \sin(\alpha) R p^2 + 8\pi \sin(\alpha) I^2 - 8\pi \alpha I^2 + 8\sin(\alpha) R p^2 \alpha \\
& - 8\sin(\alpha) \alpha I^2 + \pi^4 \sin(\alpha)^2 R p^2 + 4\pi^2 \cos(\alpha)^4 R p^2 + 4\cos(\alpha)^4 R p^2 \alpha^2 + \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha^4 + 2\pi^4 \cos(\alpha) R p^2 + 2\cos(\alpha) R p^2 \alpha^4 - 4\pi^3 \sin(\alpha) R p^2 \\
& - 2 R p^2 \alpha^4 - 2\pi^4 R p^2 + 8\pi^3 R p^2 \alpha - 12\pi^2 R p^2 \alpha^2 + 8\pi R p^2 \alpha^3 + 12\pi^2 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha - 12\pi \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha^2 \\
& - 24\pi^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \alpha - 8\pi \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha + 24\pi \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \alpha^2 + 8 I^2 + 16\cos(\alpha) \sin(\alpha) \alpha I^2 - 4\pi^3 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \\
& - 4\pi^3 \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha + 6\pi^2 \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha^2 - 8\pi \cos(\alpha)^4 R p^2 \alpha - 4\pi \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha^3 + 4\cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha^3 + 8\pi^3 \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \\
& - 8\pi^3 \cos(\alpha) R p^2 \alpha + 4\pi^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 R p^2 + 12\pi^2 \cos(\alpha) R p^2 \alpha^2 + 8\pi \cos(\alpha)^3 \sin(\alpha) R p^2 - 8\pi \cos(\alpha) R p^2 \alpha^3 - 8\cos(\alpha)^3 \sin(\alpha) R p^2 \alpha \\
& + 4\cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 R p^2 \alpha^2 - 8\cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \alpha^3 + 12\pi^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha - 24\pi \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 + 8\pi \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) I^2 - 8\pi \cos(\alpha)^2 \alpha I^2 \\
& - 12\pi \sin(\alpha) R p^2 \alpha^2 + 24\cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) R p^2 \alpha - 8\cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) \alpha I^2 + 24\pi \cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 - 16\pi \cos(\alpha) \sin(\alpha) I^2 + 16\pi \cos(\alpha) \alpha I^2 \\
& \left. - 24\cos(\alpha) \sin(\alpha) R p^2 \alpha \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

A5 – Expressão analítica de Cy

Nota: As expressões analíticas de Cx e Cy foram obtidas a partir do software *MAPLE*, verificadas analiticamente atribuindo vários valores às variáveis no software *MATLAB*, e os resultados foram confirmados geometricamente através do software *SOLIDWORKS*.